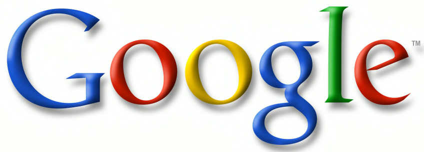
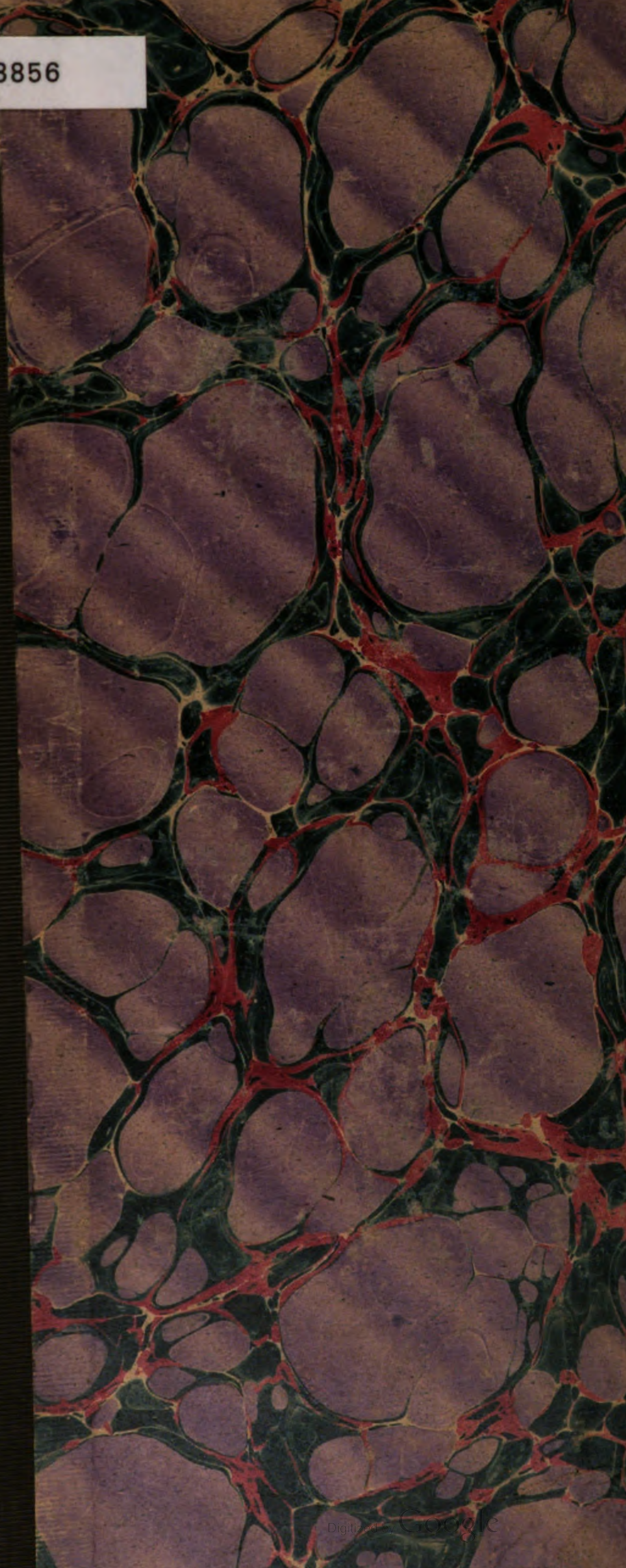
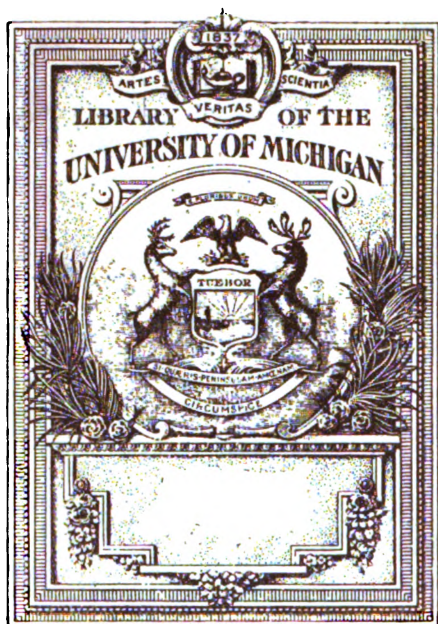





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

# NIEUWE
# WIS- EN NATUURKUNDIGE
# VERHANDELINGEN

VAN HET

# GENOOTSCHAP,

TE AMSTERDAM,

TER SPREUKE VOERENDE:

*EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.*

---

TWEEDE DEEL.

EERSTE STUK.

---

VERHANDELINGEN.

(Gedrukt voor Rekening van het Genootschap.)

*Te AMSTERDAM*, bij
WEIJTINGH EN VAN DER HAART,
BOEKVERKOOPERS,
Warmoesstraat, bij de Wijde Kerksteeg, I, N°. 25.
1854.

*Geene Exemplaren van de Werken dezes Genootschaps worden voor echt erkend, dan die, welke aldus geteekend zijn:*

W. Tilage

*Tweede Secretaris.*

# INHOUD.

# VERHANDELING

OVER DE

# VARIATIE-REKENING,

DOOR

*H. VAN BLANKEN,*

*Stads-Lector in de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen*

*te Zwolle.*

# BERIGT.

*Deze Verhandeling behelst eigenlijk niets meer dan men b. v. in het groote werk van* LACROIX, *of in andere buitenlandsche leerboeken over de Integraal-Rekening, kan vinden; het nut van hare uitgave is dus alleen daarin te zoeken, dat er* in onze taal *nog geen doelmatig geschrift over de* Variatie-Rekening *bestaat. De Schrijver heeft daarom ook slechts ten doel, om door het leveren van dit kort geschrift in het Nederlandsch, tot verspreiding van hoogere Wiskundige kennis onder zijne Landgenooten en Medeleden, mede te werken.*

*Het algemeen aangenomen variatie-teeken* $\delta$ *verschilt in vorm weinig van het in de werken dezes Genootschaps gebruikelijke differentiaal-teeken* $\delta$. *Deze overeenkomst maakt het gezamenlijke gebruik dezer teekens eenigzins lastig; het is hierom, dat in deze Verhandeling de differentialen door de letter* d *aangeduid worden.*

# EERSTE AFDEELING.

§ 1. *Elke grootheid, welker waarde van eenige standvastige en veranderlijke elementen afhankelijk is, wordt eene* functie *van de zamenstellende veranderlijke elementen genoemd.*

Men stelt zulk eene functie in het algemeen voor door de veranderlijke elementen tusschen haakjes in te sluiten, en er de letter F voor te plaatsen. Zoo beteekent F $(x)$ eene functie van het veranderlijke element $x$; F $(x, y)$ eene functie van de veranderlijke elementen $x$ en $y$; enz.

Wanneer men bijzonder de aandacht wil vestigen op de standvastige elementen eener functie, dan worden dezelve, nevens de veranderlijke, tusschen de haakjes geplaatst. Stellen alzoo $x, y, z$ veranderlijke en $a, b, c$ standvastige grootheden voor, dan beteekent F $(x, y, z, a, b, c)$ eene functie, zamengesteld uit de veranderlijke elementen $x, y, z$ en de standvastige $a, b, c$.

F $(x + a)$ beteekent eene functie, die uit $x + a$ is zamengesteld, en bijgevolg veel minder algemeen is dan F $(x, a)$, in welke $x$ en $a$ op alle denkbare wijzen verbonden, kunnen voorkomen. Op gelijke wijze beteekent F $(x + a, y + b)$ eene functie, die uit $x + a$ en $y + b$ is zamengesteld, en alzoo begrepen is in de meer algemeene F $(x, y, a, b)$.

§ 2. Wanneer men zegt, dat in F $(x)$ de waarde van $x$ is overgegaan in $x + t$, dan beteekent zulks, dat F $(x + t)$ op de-

zelfde wijze uit het tweeledig element $(x+t)$ is zamengesteld, als $F(x)$ uit het enkelvoudige element $x$. Was dus, terwijl A, B, C enz. standvastige coëfficiënten en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ enz. standvastige exponenten voorstellen,

$$F(x)=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}+Dx^{\delta}+enz.$$

dan zal men ook hebben

$$F(x+t)=A(x+t)^{\alpha}+B(x+t)^{\beta}+C(x+t)^{\gamma}+enz.$$

Differentieert men deze vergelijking, bij de onderstelling, dat $x$ alleen veranderlijk is, dan wordt

$$\frac{dF(x+t)}{dx}=A\alpha(x+t)^{\alpha-1}+B\beta(x+t)^{\beta-1}+enz.$$

Eveneens vindt men, door $t$ alleen als veranderlijk te onderstellen,

$$\frac{dF(x+t)}{dt}=A\alpha(x+t)^{\alpha-1}+B\beta(x+t)^{\beta-1}+enz.$$

Men heeft dus in het algemeen

$$\frac{dF(x+t)}{dx}=\frac{dF(x+t)}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

§ 3. Ontwikkelt men $F(x+t)$ in eene volgens de opklimmende magten van $t$ geordende reeks, dan moet dezelve voor $t=0$ overgaan in $F(x)$. Er kunnen dus in die reeks geene negatieve magten van $t$ voorkomen, omdat deze magten voor $t=0$ niet zouden verdwijnen, maar integendeel oneindig groot worden.

Was alzoo de ontwikkelde reeks

$$F(x+t)=F(x)+Kt^{k}+Mt^{m}+Nt^{n}+enz. \quad . \quad (2),$$

dan zijn $k$, $m$, $n$, *enz.* standvastige positieve getallen, terwijl K, M, N, *enz.* functiën van $x$ voorstellen.

Differentieert men de vergelijking (2) bij de onderstelling, dat $x$ alleen veranderlijk is, dan wordt

$$\frac{dF(x+t)}{dx}=\frac{dF(x)}{dx}+\frac{dK}{dx}t^{k}+\frac{dM}{dx}t^{m}+enz.$$

Differentieert men dezelfde vergelijking bij de onderstelling, dat $t$ alleen veranderlijk is, dan wordt

$$\frac{dF(x+t)}{dt}=Kkt^{k-1}+Mmt^{m-1}+Nnt^{n-1}+enz.$$

Der-

Derhalve is volgens de vergelijking (1)

$$\frac{dF(x)}{dx} + \frac{dK}{dx}t^k + \frac{dM}{dx}t^m + \textit{enz.}$$
$$= K k t^{k-1} + M m t^{m-1} + N n t^{n-1} + \textit{enz.}$$

Daar deze vergelijking voor alle positieve en negatieve waarden van $t$ blijft bestaan, en beide leden volgens de opklimmende magten van $t$ geordend zijn, zoo moeten in elke twee overeenkomstige termen de exponenten der magten van $t$, zoowel als de coëfficiënten, aan elkander gelijk zijn.

Wij hebben alzoo vooreerst

$$k-1=0 \quad , \quad m-1=k \quad , \quad n-1=m \quad , \textit{enz};$$

hieruit volgt

$$k=1 \quad , \quad m=2 \quad , \quad n=3 \quad , \textit{enz}.$$

Verder hebben wij

$$Kk=\frac{dF(x)}{dx},\ Mm=\frac{dK}{dx},\ Nn=\frac{dM}{dx},\ \textit{enz}.$$

derhalve

$$K=\frac{dF(x)}{dx},\ M=\frac{d^2F(x)}{2\,dx^2},\ N=\frac{d^3F(x)}{2.3\,dx^3},\ \textit{enz}.$$

Substitueert men deze waarden in de vergelijking (2), dan vindt men de merkwaardige reeks van TAYLOR

$$F(x+t)=F(x)+\frac{dF(x)}{dx}\times t+\frac{d^2F(x)}{dx^2}\times\frac{t^2}{2}+\textit{enz}. \quad (3).$$

Men stelle $u=F(x)$, $\frac{du}{dx}=p_1$, $\frac{d^2u}{dx^2}=p_2$, $\frac{d^3u}{dx^3}=p_3$, enz.;

verder duide men de aangroeijing van $x$ aan door $\Delta x$, en de overeenkomstige aangroeijing van $u$ door $\Delta u$, dan vindt men uit (3)

$$\Delta u=p_1\Delta x+p_2\times\frac{\Delta x^2}{2}+p_3\times\frac{\Delta x^3}{2.3}+\textit{enz}. \quad .\ .\ .\ .\ (4)$$

§ 4. AANMERKING. Wanneer $p_1$ niet gelijk nul is, dan kan blijkbaar in het tweede lid der vergelijking (4) de aangroeijing $\Delta x$ zoo klein genomen worden, dat de volstrekte waarde van den term $p_1\Delta x$ grooter wordt dan de som van al de volgende termen. Voor zulk eene kleine waarde van $\Delta x$ verkrijgt dus de aangroeijing $\Delta u$ hetzelfde teeken als de term $p_1\Delta x$.

Is

Is $p_1$ gelijk nul, en $p_2$ niet gelijk nul, dan zal voor eene genoegzaam kleine waarde van $\Delta x$, de aangroeijing $\Delta u$ hetzelfde teeken verkrijgen als de term $p_2 \Delta x^2$, en bijgevolg, daar $\Delta x^2$ altijd positief is, hetzelfde teeken als $p_2$.

Zijn $p_1$ en $p_2$ beide gelijk nul, en $p_3$ niet gelijk nul, dan zal wederom voor eene genoegzaam kleine waarde van $\Delta x$, de aangroeijing $\Delta u$ hetzelfde teeken verkrijgen als de term $p_3 \Delta x^3$, en zoo vervolgens.

§ 5. *De waarde eener functie* $u = F(x)$ *is voor eene bepaalde waarde van het veranderlijke element* $x$ *een* maximum, *wanneer dezelve kleiner wordt, indien* $x$ *met eene kleine grootheid vermeerdert, en ook indien* $x$ *met eene kleine grootheid vermindert.*

*Wordt, daarentegen, in beide deze gevallen de waarde der functie grooter, dan is dezelve een* minimum.

Uit hetgeen in § 4 is aangemerkt volgt, dat $u = F(x)$ voor eene bepaalde waarde van $x$ geen maximum of minimum kan zijn, ten zij $p_1 = 0$ en dus ook de aangroeijing $\Delta u$, in zoo ver dezelve als alleen afhankelijk wordt beschouwd van de eerste magt van $\Delta x$, gelijk nul worde.

Is nu voor eene bepaalde waarde van $x$, $p_1$ gelijk nul, en $p_2$ niet gelijk nul, dan zal, voor eene genoegzaam kleine waarde van $\Delta x$, $\Delta u$ negatief of positief en dus $u$ een maximum of minimum zijn, naar dat $p_2$ negatief of positief is.

Worden voor eene bepaalde waarde van $x$, $p_1$ en $p_2$ beide gelijk nul, maar $p_3$ niet gelijk nul, dan kan de overeenkomstige waarde van $u$ geen maximum noch minimum zijn.

Worden echter $p_1$, $p_2$ en $p_3$ gelijk nul, maar $p_4$ niet gelijk nul, dan zal, voor eene genoegzaam kleine waarde van $\Delta x$, $\Delta u$ negatief of positief en bijgevolg $u$ een maximum of minimum zijn, naar dat $p_4$ negatief of positief is.

§ 6. VOORBEELD I. *Van alle regte cirkelvormige kegels, welke dezelfde schuine zijde* A B $= a$ *hebben, dien te bepalen, wiens inhoud een maximum of minimum is.*

Laat A B A′ (Fig. 1) in het algemeen eenen regten cirkelvormigen kegel voorstellen, wiens schuine zijde $= a$ is. Stel den

straal

ſtraal des grondvlaks $OA = x$, dan is de inhoud des kegels $= \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)}$.

Men kan hierbij aanmerken, dat de ſtraal $OA = + r$ zijnde, de ſtraal $OA' = - r$ is, en dat dus door de waarden $x = + r$ en $x = - r$ hetzelfde grondvlak en dezelfde kegel wordt aangeduid.

Eigenlijk ſtemmen met elke waarde van $x$ twee kegels $ABA'$ en $AB'A'$ overeen, van welke de een boven en de ander beneden het grondvlak $AA'$ is gelegen. Hier worden alleen die kegels bedoeld, welke boven het grondvlak $AA'$ gelegen zijn. De inhoud van een dezer kegels zal blijkbaar een maximum of minimum wezen voor zulk eene waarde van $x$, welke $+ x^2 \sqrt{(a^2 - x^2)}$ en dus ook het vierkant dezer uitdrukking, dat is, $x^4 (a^2 - x^2)$ tot een maximum of minimum maakt.

Men kan dienvolgens ſtellen

$$u = F(x) = x^4 (a^2 - x^2);$$

hieruit vindt men, door achtereenvolgend te differentiëeren,

$$p_1 = 4 a^2 x^3 - 6 x^5 ,$$
$$p_2 = 12 a^2 x^2 - 30 x^4 ,$$
$$p_3 = 24 a^2 x - 120 x^3 ,$$
$$p_4 = 24 a^2 - 360 x^2 .$$

De waarden van $x$, welke $p_1 = 0$ maken, zijn $x = 0$ en $x = \pm \frac{1}{3} a \sqrt{6}$.

De waarde $x = 0$ maakt ook $p_2$ en $p_3$ beide gelijk nul, maar $p_4$ poſitief, en geeft alzoo een minimum te kennen.

De waarde $x = \pm \frac{1}{3} a \sqrt{6}$ maakt $p_2$ negatief, en duidt alzoo een maximum aan.

Neemt men dus $OA = OA' = \frac{1}{3} a \sqrt{6}$, dan verkrijgt de kegel $ABA'$ den grootſten inhoud.

Laat men, $OA = OA' = \frac{1}{3} a \sqrt{6}$ zijnde, de punten $A$ en $A'$ gelijkelijk tot het punt $O$ naderen, dan wordt de inhoud des kegels ſteeds kleiner, totdat de punten $A$ en $A'$ in $O$ vallende, de inhoud nul wordt. Verſchuift men de punten $A$ en $A'$ nu nog verder, dan komt $A$ aan de regter- en $A'$ aan den linkerkant van $O$ te liggen, en de inhoud neemt wederom toe; weshalve $x = 0$ een minimum oplevert.

Had men, $OA = OA' = \frac{1}{3} a \sqrt{6}$ zijnde, de punten $A$ en $A'$ ge-

gelijkelijk van het punt O verwijderd, dan zou de inhoud des kegels wederom kleiner en eindelijk, voor $OA = OA' = a$, nul worden. Deze waarde stelt echter geen minimum voor, omdat bij eene verdere verplaatsing der punten A en A' de inhoud niet wederom aangroeit, maar onbestaanbaar wordt.

§ 7. VOORBEELD II. *Van al de driehoeken ABC (Fig. 2), welke dezelfde basis $AB = a$ en denzelfden tophoek $ACB = \alpha$ hebben, dien te bepalen, wiens inhoud een maximum is.*

Stelt men de zijden $AC = x$ en $BC = y$, dan is

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\,Cos.\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

en *Inhoud driehoek* $ABC = \frac{1}{2}\,xy\,Sin.\,\alpha$.

De inhoud des driehoeks zal dus een maximum zijn, wanneer het product $xy$ een maximum is. Neemt men nu in aanmerking, dat volgens de vergelijking (A), $y$ eene functie is van $x$, dan ziet men, dat hier mag gesteld worden

$$u = F(x) = xy.$$

Gevolgelijk

$$p_1 = \frac{du}{dx} = y + x\frac{dy}{dx};$$

en hieruit vinden wij, door $p_1 = 0$ te stellen,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x};$$

Uit de vergelijking (A) vinden wij echter

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x - y\,Cos.\,\alpha}{y - x\,Cos.\,\alpha},$$

derhalve

$$\frac{y}{x} = \frac{x - y\,Cos.\,\alpha}{y - x\,Cos.\,\alpha}$$

en

$$x^2 = y^2.$$

*Tot het maximum wordt dus gevorderd, dat de opstaande zijden des driehoeks even groot zijn.*

§ 8. AANMERKING. Men vindt bij de hier voorgestelde wijze van oplossen slechts eene voorwaarde, zonder welke geen maximum of minimum kan plaats hebben. Zulks is echter in de meeste gevallen voldoende, wanneer reeds uit eene oppervlakkige beschouwing blijkt, dat er een maximum of minimum bestaan moet.

§ 9.

§ 9. VOORBEELD III. *Uit een gegeven punt, naar eene kromme lijn, eene regte lijn te trekken, welke een maximum of minimum is.*

Laten $x'$, $y'$ de onderling regthoekige coördinaten van het gegeven punt A (Fig. 3) zijn, en $x$, $y$ de coördinaten van eenig punt B der gegevene kromme, dan is

$$\textit{de lengte der lijn } AB = \sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2]}.$$

Die lijn zal alzoo een maximum of minimum wezen, wanneer $(x-x')^2 + (y-y')^2$ een maximum of minimum is.

Neemt men nu in aanmerking, dat de vergelijking der kromme gegeven zijnde, $y$ eene functie is van $x$, dan ziet men, dat men zal mogen stellen

$$u = F(x) = (x-x')^2 + (y-y')^2.$$

Gevolgelijk

$$p_1 = \frac{du}{dx} = 2(x-x') + 2(y-y')\frac{dy}{dx}.$$

Hieruit vinden wij, door $p_1 = 0$ te stellen,

$$y - y' = -\frac{dx}{dy}(x-x').$$

*Tot het maximum wordt dus gevorderd, dat de lijn* AB *de gegevene kromme in het punt* B *regthoekig doorsnijdt; zullende de lijn* AB *een maximum wezen, wanneer in het punt* B *de holle zijde der kromme naar* A *is gekeerd, en een minimum, wanneer de bolle zijde naar* A *gekeerd is.*

§ 10. Wanneer in eene functie $u = F(x, y)$ de veranderlijke elementen $x$ en $y$ onderling onafhankelijk zijn, dan kan men het eene element laten aangroeijen, terwijl het andere niet verandert. Laat alzoo, $y$ onveranderd blijvende, $x$ met de grootheid $\Delta x$ vermeerderd worden, en $u$ daardoor overgaan in U, dan is volgens de vergelijking (3)

$$U = u + \frac{du}{dx} \times \Delta x + \frac{d^2 u}{dx^2} \times \frac{\Delta x^2}{2} + \textit{enz.}$$

Laat men vervolgens $y$ met eene grootheid $\Delta y$ aangroeijen, dan wordt

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) = U + \frac{dU}{dy} \times \Delta y + \frac{d^2 U}{dy^2} \times \frac{\Delta y^2}{2} + \textit{enz.}$$

In

In deze vergelijking is:

$$U = u + \frac{du}{dx} \times \Delta x + \frac{d^2 u}{dx^2} \times \frac{\Delta x^2}{2} + enz.$$

$$\frac{dU}{dy} = \frac{du}{dy} + \frac{d^2 u}{dx\,dy} \times \Delta x + enz.$$

$$\frac{d^2 U}{dy^2} = \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^3 u}{dx\,dy^2} \times \Delta x + enz.$$

Substitueert men deze waarden, dan vindt men

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) = u + \frac{du}{dx} \times \Delta x + \frac{d^2 u}{dx^2} \times \frac{\Delta x^2}{2} + enz.$$
$$+ \frac{du}{dy} \times \Delta y + \frac{d^2 u}{dx\,dy} \times \Delta x \Delta y + enz.$$
$$+ \frac{d^2 u}{dy^2} \times \frac{\Delta y^2}{2} + enz.$$

Stelt men nu $\frac{du}{dx} = A$, $\frac{du}{dy} = B$, $\frac{d^2 u}{dx^2} = C$, $\frac{d^2 u}{dx\,dy} = D$, $\frac{d^2 u}{dy^2} = E$, en $F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = \Delta u$, dan wordt

$$\Delta u = A \Delta x + C \frac{\Delta x^2}{2} + enz.$$
$$+ B \Delta y + D \Delta x \Delta y + enz.$$
$$+ E \frac{\Delta y^2}{2} + enz.$$

Stelt men verder $\Delta y = n \Delta x$, dan verkrijgt men

$$\Delta u = (A + nB) \Delta x + \tfrac{1}{2}(C + 2nD + n^2 E) \Delta x^2 + enz. \quad (5).$$

§ 11. *Eene functie van twee, onderling onafhankelijke, veranderlijke elementen is voor eene bepaalde waarde dezer elementen een* maximum, *indien de waarde der functie kleiner wordt, wanneer de elementen beide met eene zeer kleine grootheid vermeerderen of verminderen, alsmede wanneer het eene element met eene zeer kleine grootheid vermeerdert, terwijl het andere vermindert.*

*Wordt, daarentegen, de waarde der functie in alle deze gevallen grooter, dan is dezelve een* minimum.

Uit de vergelijking (5) is blijkbaar, dat $u = F(x, y)$ geen maxi-

maximum of minimum kan zijn, ten zij de aangroeijing $\Delta u$, in zoo ver dezelve van de eerste magten van $\Delta x$ en $\Delta y$ afhangt, gelijk nul worde, en dat men alzoo hebbe

$$A + n B = 0.$$

Daar echter de aangroeijingen $\Delta x$ en $\Delta y$ onderling onafhankelijk zijn, en bijgevolg voor $n$ alle positieve en negatieve waarden kunnen genomen worden, zoo moet in bovenstaande vergelijking elke term afzonderlijk gelijk nul wezen.

Zijn nu A en B beide gelijk nul, dan zal $u$ een maximum zijn, wanneer $C + 2nD + n^2 E$ voor alle positieve en negatieve waarden van $n$ negatief is. Is, daarentegen, $C + 2nD + n^2 E$ voor alle positieve en negatieve waarden van $n$ positief, dan is $u$ een minimum. Is echter, terwijl A en B beide gelijk nul zijn, $C + 2nD + n^2 E$ voor sommige waarden van $n$ positief en voor andere waarden van $n$ negatief, dan is $u$ geen maximum noch minimum.

§ 12. VOORBEELD IV. *Van alle driehoeken, welke denzelfden omtrek hebben, dien te bepalen, wiens inhoud een maximum of minimum is.*

Laat A B C (Fig. 2) in het algemeen een driehoek voorstellen, wiens omtrek $AB + AC + BC = a$ is. Stel $AB = x$ en $AC = y$, dan is

*de Inhoud des driehoeks* $= \frac{1}{4} \sqrt{a(a - 2x)(a - 2y)(2x + 2y - a)}$.

Ter bepaling van het maximum of minimum kan men alzoo stellen

$$u = F(x, y) = (a - 2x)(a - 2y)(2x + 2y - a).$$

Hieruit vindt men, door achtereenvolgend differentiëren,

$$A = 4(a - 2y)(a - 2x - y),$$
$$B = 4(a - 2x)(a - x - 2y),$$
$$C = -8(a - 2y),$$
$$D = 4(4x + 4y - 3a),$$
$$E = -8(a - 2x).$$

Aan de vergelijkingen $A = 0$ en $B = 0$ wordt vooreerst voldaan door te stellen

$$a - 2x - y = 0$$

en

$$a - x - 2y = 0,$$

waar-

waaruit volgt $x = \frac{1}{3}a$ en $y = \frac{1}{3}a$.

Voor deze waarden van $x$ en $y$ wordt

$$C = -\tfrac{8}{3}a\,,\ D = -\tfrac{4}{3}a\,,\ E = -\tfrac{8}{3}a,$$

derhalve $C + 2nD + n^2E = -\frac{8}{3}a(1 + n + n^2)$.

Daar deze uitdrukking voor alle waarden van $n$ negatief is, zoo volgt hieruit, *dat de gelijkzijdige driehoek een maximum moet zijn.*

Verder wordt aan de vergelijkingen $A = 0$ en $B = 0$ voldaan door te stellen

$$a - 2x = 0$$

en $a - 2y = 0,$

waaruit volgt $x = \frac{1}{2}a$ en $y = \frac{1}{2}a$.

Voor deze waarden van $x$ en $y$ wordt

$$C = 0\,,\ D = 4a\,,\ E = 0,$$

derhalve $C + 2nD + n^2E = 8an$.

Daar deze uitdrukking voor alle positieve en negatieve waarden van $n$, niet hetzelfde teeken behoudt, zoo volgt hieruit, *dat $x = \frac{1}{2}a$ en $y = \frac{1}{2}a$ tot geen maximum noch minimum behooren.*

Liet men, $AB = \frac{1}{2}a$ en $AC = \frac{1}{2}a$ zijnde, deze lijnen elk met eene kleine grootheid vermeerderen of verminderen, dan zou in beide gevallen $n$ positief en dus grooter worden, doch de inhoud des driehoeks zou in het eerste geval negatief en in het tweede positief zijn. Liet men, daarentegen, de eene lijn aangroeijen en de andere verminderen, dan zou $n$ negatief en dienvolgens de inhoud des driehoeks onbestaanbaar worden.

Aan de vergelijkingen $A = 0$ en $B = 0$ zou ook nog voldaan worden door te stellen

$$a - 2y = 0,$$

en $a - x - 2y = 0,$

waaruit volgt $x = 0$ en $y = \frac{1}{2}a$;

alsmede door te stellen

$$a - 2x = 0,$$

en $a - 2x - y = 0,$

waaruit volgt $x = \frac{1}{2}a$ en $y = 0$.

Doch ook deze waarden geven aan $C + 2nD + n^2E$ voor alle waar-

waarden van $u$ geen bepaald teeken, en behooren derhalve tot geen maximum of minimum.

§ 13. Voorbeeld V. *Onder al de regte lijnen, welke uit een gegeven punt naar een gegeven oppervlak kunnen getrokken worden, die te bepalen, welke een maximum of minimum is.*

Laten $x'$, $y'$, $z'$ de onderling regthoekige coördinaten van het gegeven punt zijn, en $x$, $y$, $z$ de coördinaten van eenig punt in het gegeven oppervlak. dan is

*de afstand dezer punten* $= \sqrt{[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]}$.

Daar de vergelijking van het oppervlak gegeven is, zoo kan men $z$ aanmerken als eene functie van $x$ en $y$; men mag dienvolgens, ter bepaling van het begeerde maximum of minimum, stellen

$$u = F(x, y) = (x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2.$$

Hieruit volgt:

$$A = 2(x-x')+2(z-z')\frac{dz}{dx},$$

$$B = 2(y-y')+2(z-z')\frac{dz}{dy}.$$

De vergelijkingen $A=0$ en $B=0$ geven dus:

$$x-x' = -\frac{dz}{dx}(z-z'),$$

$$y-y' = -\frac{dz}{dy}(z-z').$$

Tot het maximum of minimum wordt alzoo gevorderd, *dat de uit het gegeven punt getrokkene lijn het gegeven oppervlak regthoekig doorsnijdt.*

---

# TWEEDE AFDEELING.

§ 14. *Wanneer eene functie* $y = F(x)$ *in hare zamenstelling verandert en alzoo overgaat in* $y_1 = F_1(x)$, *dan wordt de hierdoor ontstaande aangroeijing van de waarde der functie, dat is, het verschil der grootheden* $y_1$ *en* $y$, *wel-*

*welke met dezelfde waarde van x overeenstemmen, de* variatie *der functie genoemd, en voorgesteld door* $\delta y$ *of* $\delta F(x)$.

*Stelt men, dat x verandert in* $x + \Delta x$, *y overgaat in* $y + \Delta y$ *en* $y_1$ *in* $y_1 + \Delta y_1$, *dan is het verschil der aangroeijingen van* $y_1$ *en y, dat is,* $\Delta y_1 - \Delta y$ *de variatie van* $\Delta y$ *en wordt voorgesteld door* $\delta \Delta y$.

*Laat in de oorspronkelijke functie* $F(x)$ *het element x overgaan in* $x + \Delta x$, *en vervolgens* $F(x + \Delta x)$ *in* $F_1(x + \Delta x)$, *dan is* $F_1(x + \Delta x) - F(x + \Delta x)$ *de variatie van* $F(x + \Delta x)$, *en wordt voorgesteld door* $\delta F(x + \Delta x)$.

*Het verschil tusschen* $\delta F(x + \Delta x)$ *en* $\delta F(x)$ *is de aangroeijing van* $\delta y$, *en wordt voorgesteld door* $\Delta \delta y$ *of* $\Delta \delta F(x)$.

§ 15. Om dit een en ander meer aanschouwelijk te maken, neme men O X en O Y (Fig. 4) tot regthoekige coördinaten-assen, en stelle, dat $y = F(x)$ de vergelijking zij der kromme A B en $y_1 = F_1(x)$ de vergelijking der kromme A′ B′. Men neme nu $OP = x$ en trekke uit P eene loodlijn, welke de krommen in M en M′ doorsnijdt, dan is $PM = y = F(x)$, $PM' = y_1 = F_1(x)$ en $MM' = \delta y = \delta F(x)$.

Verder neme men $Pp = \Delta x$ en trekke de loodlijn p m′, welke de krommen in m en m′ doorsnijdt, dan is $mm' = \delta F(x + \Delta x)$.

Vervolgens trekke men uit de punten M en M′ de loodlijnen M C en M′ C′, dan is $mC = \Delta y$ en $m'C' = \Delta y_1$.

Trekt men nu eindelijk de koorde M m en de lijn M′D evenwijdig aan M m, dan heeft men blijkbaar

$$\delta \Delta y = m'C' - mC = m'D;$$
$$\Delta \delta y = mm' - MM' = m'D;$$

derhalve is

$$\delta \Delta y = \Delta \delta y.$$

Deze vergelijking is volstrekt algemeen en blijft dienvolgens nog bestaan, wanneer de aangroeijingen van $x$ en $y$ verdwijnende, in differentialen overgaan, zoodat men ook nog zal hebben

$$\delta d y = d \delta y.$$

*De variatie van de differentiaal eener grootheid is dus in het algemeen gelijk aan de differentiaal van de variatie dezer grootheid.*

§ 16. Stelt men de integraal-uitdrukking $\int z = Z$, dan is $z = dZ$ en bijgevolg $\delta z = \delta dZ$; maar $\delta dZ = d\delta Z$,
derhalve $d\delta Z = \delta z$,
bijgevolg $\delta Z = \int \delta z$,
of, voor $Z$ hare waarde schrijvende,

$$\delta \int z = \int \delta z.$$

*De variatie van de integraal eener grootheid is dus in het algemeen gelijk aan de integraal van de variatie dezer grootheid.*

§ 17. Laat $V$ eene functie zijn van $x, y, p_1, p_2, p_3$, *enz.* $\left(\text{zijnde } p_1 = \frac{dy}{dx}, p_2 = \frac{dp_1}{dx}, p_3 = \frac{dp_2}{dx}, \textit{enz.}\right)$.

*Is* nu $y$ gegeven in eene functie van $x$, zoodat men heeft $y = F(x)$, dan zullen met eene bepaalde waarde van $x$, bepaalde waarden van $y, p_1, p_2$, *enz.* overeenstemmen, en $V$ zal ook eene bepaalde waarde verkrijgen.

Neemt men vervolgens $y$ in eéne andere functie van $x$, zoodat men stelt $y = F_1(x)$, dan zullen met dezelfde waarde van $x$ overeenstemmen $y + \delta y, p_1 + \delta p_1, p_2 + \delta p_2$, *enz.*, en $V$ zal overgaan in $V + \delta V$.

De waarde van $V + \delta V$ wordt blijkbaar verkregen door in $V$ voor $y, p_1, p_2$, *enz.* te schrijven $y + \delta y, p_1 + \delta p_1, p_2 + \delta p_2$, *enz.*

Hieruit volgt, dat men, de tweede en hoogere magten van $\delta y$, $\delta p_1$, *enz.* verwaarloozende, de variatie van $V$ zal verkrijgen door $V$ te differentiëren ten opzigte van de veranderlijke elementen $y, p_1, p_2$, *enz.*, en vervolgens in plaats van $dy, dp_1, dp_2$, *enz.* te schrijven $\delta y, \delta p_1, \delta p_2$, *enz.*

Vond men alzóo door differentiëren

$$dV = Y\,dy + P_1\,dp_1 + P_2\,dp_2 + \textit{enz.},$$

dan is $$\delta V = Y\,\delta y + P_1\,\delta p_1 + P_2\,\delta p_2 + \textit{enz.}$$

§ 18. Wanneer in de integraal-uitdrukking $u = \int V\,dx$, de grootheid $V$ eene functie is van $x, y, p_1, p_2$, *enz.*, dan is, zoo lang $x$ en $y$ onderling onafhankelijk zijn, de integraal onbestemd. Neemt men echter tusschen $x$ en $y$ eene zekere betrekking aan, welke uitgedrukt wordt door $F(x, y) = 0$, dan verkrijgt de integraal $u = \int V\,dx$, tusschen gegevene grenzen, eene bepaalde waar-

waarde. Verandert nu de aangenomene betrekking tusschen $x$ en $y$, zoodat dezelve wordt uitgedrukt door $F_1(x, y) = 0$, dan zal de waarde der integraal tusschen dezelfde grenzen eene aangroeijing ondergaan, welke de variatie der integraal wordt genoemd, en uitgedrukt wordt door

$$\delta u = \delta \int V \, dx = \int \delta (V dx) = \int \delta V . dx.$$

Stelt men in deze uitdrukking voor $\delta V$ de in § 17 opgegevene waarde, dan wordt

$$\delta u = \int (Y \delta y + P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + P_3 \delta p_3 + enz.) \, dx$$
$$= \int Y \delta y \, dx + \int P_1 \delta p_1 \, dx + \int P_2 \delta p_2 \, dx + enz.$$

Daar $p_1 = \frac{dy}{dx}$ is, zoo is $\delta p_1 = \frac{\delta dy}{dx} = \frac{d \delta y}{dx}$,

en bijgevolg $\int P_1 \delta p_1 \, dx = \int P_1 \, d \delta y$;

verder heeft men door gedeeltelijk integreren, volgens de bekende herleidings-formule $\int X dY = XY - \int Y dX$,

$$\int P_1 . d \delta y = P_1 \delta y - \int \delta y \frac{dP_1}{dx} dx,$$

alzoo is $$\int P_1 \delta p_1 \, dx = P_1 \delta y - \int \delta y \frac{dP_1}{dx} dx.$$

Op gelijke wijze vindt men, aangezien $\delta p_2 = \frac{d \delta p_1}{dx}$ is,

$$\int P_2 \delta p_2 \, dx = P_2 \delta p_1 - \int \delta p_1 \frac{dP_2}{dx} dx,$$

of, voor $\delta p_1$ hare waarde $\frac{d \delta y}{dx}$ schrijvende, en nogmaals gedeeltelijk integrerende,

$$\int P_2 \delta p_2 \, dx = P_2 \frac{d \delta y}{dx} - \frac{dP_2}{dx} \delta y + \int \delta y \frac{d^2 P_2}{dx^2} dx.$$

Eveneens vindt men

$$\int P_3 \delta p_3 \, dx = P_3 \frac{d^2 \delta y}{dx^2} - \frac{dP_3}{dx} . \frac{d \delta y}{dx} + \frac{d^2 P_3}{dx^2} \delta y - \int \delta y \frac{d^3 P_3}{dx^3} dx.$$

Door substitutie van deze waarden wordt

$$\delta u = \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \frac{d^2 P_3}{dx^2} - enz.\right) \delta y + \left(P_2 - \frac{dP_3}{dx} + enz.\right) \frac{d \delta y}{dx} + enz.$$
$$+ \int \left(Y - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2 P_2}{dx^2} - \frac{d^3 P_3}{dx^3} + enz.\right) \delta y \, dx \; . \; . \; . \; (6)$$

§ 19.

§ 19. Zal nu voor eene zekere betrekking tusschen $x$ en $y$, welke uitgedrukt wordt door $F(x, y) = 0$, de integraal $u = \int V dx$, tusschen gegevene grenzen, een maximum of minimum zijn, dan moet de variatie van $u$, in zoo ver deze alleen afhangt van de eerste magten van $\delta y$, $\delta p_1$, $\delta p_2$, *enz.*, gelijk nul wezen.

Uit de vergelijking (6) ziet men, dat $\delta u$ niet gelijk nul kan worden, ten zij men het tweede lid van het integraal-teeken bevrijde; dit kan echter, behoudens de gevorderde onafhankelijkheid van $\delta y$, slechts geschieden door te stellen

$$Y - \frac{dP_1}{dx} + \frac{d^2P_2}{dx^2} - \frac{d^3P_3}{dx^3} + enz. = 0 \quad . \quad . \quad (7).$$

Uit deze differentiaal-vergelijking kan de betrekking, welke er tusschen $x$ en $y$ bestaan moet, door integreren gevonden worden, terwijl de constanten, die bij het integreren ontstaan, uit gegevene omstandigheden behooren bepaald te worden.

De vergelijking (6) wordt nu

$$\delta u = \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + \frac{d^2P_3}{dx^2} - enz.\right)\delta y + \left(P_2 - \frac{dP_3}{dx} + enz.\right)\frac{d\delta y}{dx}$$
$$+ \; enz. + Const. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Daar $u = \int V dx$ tusschen gegevene grenzen, welke, bij voorbeeld, met de ordinaten $x'$, $y'$ en $x''$, $y''$ overeenstemmen, genomen wordt, zoo behoort ook $\delta u$ tusschen diezelfde grenzen genomen te worden.

Stelt men dus, dat voor de eerste grens der integraal het tweede lid der vergelijking (8) eene waarde $w'$ verkrijge, en voor de tweede grens eene waarde $w''$, dan wordt tot het maximum of minimum ook nog gevorderd:

$$w'' - w' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Men kan hierbij nog opmerken, dat in de vergelijking (9) slechts de waarden van $x$ en $y$ voorkomen, welke tot den aanvang en tot het einde der integraal behooren, en dat $y'$ en $y''$ standvastig zijnde, $\delta y'$ en $\delta y''$ gelijk nul zijn.

§ 20. VOORBEELD VI. *De kortste lijn te bepalen, welke tusschen twee gegevene punten in een plat vlak kan getrokken worden.*

 Laat

Laat $y = F(x)$ de vergelijking der gevraagde lijn, en $u$ hare lengte zijn, dan is

$$u = \int dx \sqrt{(1+p_1^2)}.$$

Wij hebben alzoo

$$V = \sqrt{(1+p_1^2)} \quad \text{en} \quad dV = \frac{p_1\, dp_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}}.$$

In de vergelijking (7) is dus $Y = 0$, $P_1 = \frac{p_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}}$, $P_2 = 0$, *enz.*; gevolgelijk wordt deze vergelijking

$$d\, \frac{p_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}} = 0,$$

derhalve
$$\frac{p_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}} = Const.$$

en dus ook
$$p_1 = Const. = a,$$

dat is:
$$\frac{dy}{dx} = a,$$

gevolgelijk
$$y = ax + b.$$

*De gevraagde lijn is alzoo eene regte lijn.* De standvastigen $a$ en $b$ moeten nu zoodanig genomen worden, dat de lijn door de gegevene punten loopt. Zijn dus de coördinaten der gegevene punten $x'$, $y'$ en $x''$, $y''$, dan wordt de vergelijking

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x').$$

§ 21. Voorbeeld VII. *De zwaartekracht als standvastig aannemende, begeert men de kromme lijn te bepalen, langs welke een ligchaam in den kortsten tijd uit een gegeven punt* A *naar een gegeven punt* B *kan vallen.*

Men brenge door de gegevene punten een verticaal vlak, en neme de daarin getrokkene horizontale lijn A C (Fig. 5) tot as van de $y$ en de verticale lijn A D tot as van de $x$, dan kan men de vergelijking der gevraagde lijn in het algemeen voorstellen door $y = F(x)$.

Het is bekend, dat de snelheid van een ligchaam, hetwelk door den boog A P B valt, in elke punt P der loopbaan gelijk is aan die, welke het ligchaam zou verkregen hebben op het einde van den vrijen val door de loodlijn $PQ = x$. Stelt men dus deze snelheid $= S$,

$= S$, en den weg, dien een ligchaam in de eerste seconde van den vrijen val doorloopt, $= g$, dan is $S = 2\sqrt{gx}$.

Nu kan men aannemen, dat de differentiaal des boogs in de differentiaal des tijds met eene eenparige snelheid wordt doorloopen. De differentiaal van den tijd is alzoo gelijk aan de differentiaal van den boog gedeeld door de snelheid. Stelt men dus den tijd $= T$, dan is

$$dT = \frac{dx\sqrt{(1+p_1^2)}}{2\sqrt{gx}}$$

derhalve $$T = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx\sqrt{(1+p_1^2)}}{\sqrt{x}}.$$

*Wij kunnen dus stellen, ter bepaling van het minimum,*

$$u = \int \frac{\sqrt{(1+p_1^2)}}{\sqrt{x}}\, dx,$$

bijgevolg $$V = \sqrt{\frac{1+p_1^2}{x}}, \; dV = \frac{p_1\, dp_1}{\sqrt{(x\,1+p_1^2)}}.$$

In de vergelijking (7) is dus $Y = 0$, $P_1 = \frac{p_1}{\sqrt{x(1+p_1^2)}}$, $P_2 = 0$, *enz.*; en gevolgelijk wordt deze vergelijking

$$d\,\frac{p_1}{\sqrt{x(1+p_1^2)}} = 0,$$

derhalve $$\frac{p_1}{\sqrt{x(1+p_1^2)}} = Const. = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Hieruit vindt men verder achtereenvolgend:

$$p_1 = \frac{x}{\sqrt{(2ax-x^2)}},$$

$$dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}},$$

$$y = -\sqrt{(2ax-x^2)} + a\,\textit{Boog Sin. Vers.}\,\frac{x}{a} \quad \text{(A).}$$

*De gevraagde lijn is derhalve eene* Cycloïde.

De basis dezer Cycloïde valt langs de horizontale lijn A C, en de straal des voortbrengenden cirkels is $= a$.

Om de waarde van $a$ te bepalen merke men op, dat de Cycloïde

 door

door het punt B moet loopen, waarvan de coördinaten $x''$ en $y''$ gegeven zijn. Men heeft dus de vergelijking

$$y'' = -\sqrt{(2ax'' - x''^2)} + a \, Boog \, Sin. Vers. \frac{x''}{a} \quad (B),$$

waaruit nu $a$ door benadering kan gevonden worden.

Is $x'' = 0$ en $y''$ niet $= 0$, dan ligt B in eenig punt C der horizontale lijn A C, en de vergelijking (B) wordt in dit geval

$$y'' = a \, Boog \, Sin. Vers. \, 0 = 2a\pi,$$

waaruit $$a = \frac{y''}{2\pi}.$$

Is $y'' = 0$ en $x''$ niet $= 0$, dan ligt B in eenig punt D der verticale lijn A D, en de vergelijking (B) wordt in dit geval

$$0 = -\sqrt{(2ax'' - x''^2)} + a \, Boog \, Sin. Vers. \frac{x''}{a},$$

waaruit $$\frac{\sqrt{(2ax'' - x''^2)}}{a} = Boog \, Sin. \frac{\sqrt{(2ax'' - x''^2)}}{a}.$$

De sinus is dus gelijk aan den boog; de straal des voortbrengenden cirkels is bijgevolg oneindig groot en de boog A B alzoo eene regte lijn.

§ 22. Aanmerking. Had men de horizontale lijn A C voor as van de $x$ aangenomen, en de verticale A D voor as van de $y$, dan zou men gevonden hebben

$$T = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx\sqrt{(1+p_1^2)}}{\sqrt{y}}.$$

Wij hebben dus nu, ter bepaling van het minimum,

$$u = \int \frac{(\sqrt{1+p_1^2})}{\sqrt{y}} dx,$$

dus $$V = \sqrt{\frac{1+p_1^2}{y}}$$

en $$dV = \frac{-dy\sqrt{(1+p_1^2)}}{2y\sqrt{y}} + \frac{p_1 dp_1}{\sqrt{y(1+p_1^2)}};$$

gevolgelijk $$Y = -\frac{\sqrt{(1+p_1^2)}}{2y\sqrt{y}}, \; P_1 = \frac{p_1}{\sqrt{y(1+p_1^2)}}, \; P_2 = 0, \; enz.$$

De vergelijking (7) wordt derhalve

$$Y - \frac{dP_1}{dx} = 0 \quad of \quad Y = \frac{dP_1}{dx}.$$

Stelt

Stelt men deze waarde van Y in de vergelijking

$$dV = Y\,dy + P_1\,dp_1,$$

dan wordt dezelve

$$dV = p_1\,dP_1 + P_1\,dp_1$$

derhalve $$V = p_1 P_1 + Const. = p_1 P_1 + \frac{1}{\sqrt{2a}};$$

maar $$V = \sqrt{\frac{1+p_1^2}{y}} \text{ en } P_1 = \frac{p_1}{\sqrt{y(1+p_1^2)}},$$

bijgevolg $$\sqrt{\frac{1+p_1^2}{y}} = \frac{p_1^2}{\sqrt{y(1+p_1^2)}} + \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Hieruit vindt men achtereenvolgend:

$$p_1 = \frac{\sqrt{(2ay-y^2)}}{y},$$

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2ay-y^2)}},$$

en $$x = -\sqrt{(2ay-y^2)} + a \, Boog\, Sin.\, Vers.\, \frac{y}{a},$$

welke vergelijking met de vergelijking (A) geheel overeenstemt.

---

# DERDE AFDEELING.

§ 23. Laat, $\varphi$ eene functie zijnde van $x, y, p_1, p_2$, enz., de integraal $\int \varphi\, dx$, tusschen gegevene grenzen $x', y'$ en $x'', y''$ eene standvastige waarde moeten hebben.

Is nu deze gestelde waarde niet grooter dan, noch gelijk aan, de grootste waarde, en ook niet kleiner dan, noch gelijk aan, de kleinste, welke de integraal tusschen de gegevene grenzen kan hebben, dan bestaan er blijkbaar oneindig vele verschillende betrekkingen tusschen $x$ en $y$, welke aan de integraal de gestelde waarde doen verkrijgen.

Men stelle deze onderscheidene betrekkingen tusschen $x$ en $y$ voor door $F(x,y)=0$, $F_1(x,y)=0$, $F_2(x,y)=0$, enz.; en neme nu aan, dat $F(x,y)=0$ overga in $F_1(x,y)=0$, dan zal voor dezelfde waarde van $x$ de waarde van $y$ overgaan in

$y + \delta y,$

$y + \delta y$, de waarde van $p_1$ in $p_1 + \delta p_1$, de waarde van $p_2$ in $p_2 + \delta p_2$, *enz.*; terwijl, de waarde van $\int \varphi \, dx$ tusschen de gegevene grenzen standvastig blijvende, $\delta \int \varphi \, dx$ gelijk nul moet zijn.

Daar dit nu plaats heeft voor al de veranderingen, welke de functie F $(x, y) = 0$, onder de gestelde voorwaarde kan ondergaan, en gevolgelijk voor al de afwisselingen, welke er bij de waarden $\delta y$, $\delta p_1$, $\delta p_2$, *enz.* plaats kunnen hebben, zoo moet de waarde van $\delta \int \varphi \, dx$ reeds nul zijn, in zoo ver dezelve afhangt alleen van de eerste magt van $\delta y$, alsmede in zoo ver dezelve afhangt alleen van de eerste magt van $\delta p_1$, of van de eerste magt van $\delta p_2$, of van de tweede magt van $\delta y$, *enz.*

Laat nu nog gegeven zijn de onbestemde integraal $\int \Phi \, dx$, in welke $\Phi$ insgelijks eene functie van $x, y, p_1, p_2$, *enz.* voorstelt.

Deze integraal zal voor de aangenomene F $(x, y) = 0$, tusschen de gegevene grenzen $x'$, $y'$ en $x''$, $y''$, eene zekere waarde verkrijgen, welke, $\Phi$ niet identiek met $\varphi$ zijnde, aangroeit of vermindert bij elke verandering, die aan F $(x, y) = 0$, onder de gestelde voorwaarde wordt toegebragt. Zal echter $\int \Phi \, dx$, tusschen de gegevene grenzen, voor de bijzondere functie F $(x, y) = 0$ een maximum of minimum zijn, dan moet blijkbaar wederom de variatie van $\int \Phi \, dx$, in zoo ver dezelve afhangt van de eerste magten van $\delta y$, $\delta p_1$, $\delta p_2$, *enz.* gelijk nul wezen. Zoodat men alsdan heeft:

$$\delta \int \varphi \, dx = 0,$$
$$\delta \int \Phi \, dx = 0,$$

en gevolgelijk ook, $n$ een onbepaalde factor zijnde,

$$\delta \int \Phi \, dx + n \delta \int \varphi \, dx = 0,$$

of $$\delta \int (\varphi + n\varphi) \, dx = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10).$$

§ 24. VOORBEELD VIII. *De kromme lijn* BPC (*Fig.* 6) *zoodanig te bepalen, dat de boog tusschen de punten* B *en* C *eene gegevene lengte* L *hebbe, en dat de inhoud van het vlak, begrepen tusschen dezen boog, de gegevene ordinaten* AB *en* CD, *en het bepaalde gedeelte* AD *van de as der abscissen, een maximum of minimum zij.*

Men neme OX en OY tot regthoekige coördinaten-assen, en noeme $x'$, $y'$, de coördinaten van het gegevene punt B, en $x''$, $y''$ de

de coördinaten van het gegevene punt C, dan is, de integralen tusschen de grenzen $x'$, $y'$ en $x''$, $y''$ nemende,

$$L = \int dx \sqrt{(1+p_1^2)}$$

en *Inhoud* ABCD $= \int y\,dx$.

Daar nu L standvastig en de inhoud ABCD een maximum of minimum moet zijn, zoo hebben wij, volgens de vergelijking (10),

$$\delta \int [y + n\sqrt{(1+p_1^2)}]\,dx = 0,$$

derhalve is $$V = y + n\sqrt{(1+p_1^2)}$$

en $$dV = dy + \frac{n p_1 dp_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}}.$$

In de vergelijking (7) is dus $Y = 1$, $P_1 = \frac{n p_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}}$, $P_2 = 0$, *enz.*; gevolgelijk wordt deze vergelijking:

$$dx - d\,\frac{n p_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}} = 0,$$

derhalve $$\frac{n p_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}} = x + Const. = x \pm a.$$

Hieruit vindt men verder

$$dy = \pm \frac{(x \pm a)\,dx}{\sqrt{[n^2 - (x \pm a)^2]}},$$

bijgevolg $$y \pm b = \pm \sqrt{[n^2 - (x \pm a)^2]},$$

of $$(x \pm a)^2 + (y \pm b)^2 = n^2.$$

*De gevraagde kromme is alzoo een cirkelboog, die n tot straal heeft.*

De inhoud zal blijkbaar een maximum zijn, wanneer de holle, en een minimum, wanneer de bolle zijde der kromme naar de as der abscissen is gekeerd.

Ter bepaling der standvastigen $a$, $b$ en $n$ heeft men vooreerst, omdat de boog door de gegevene punten B en C moet loopen,

$$(x' \pm a)^2 + (y' \pm b)^2 = n^2,$$
$$(x'' \pm a)^2 + (y'' \pm b)^2 = n^2;$$

verder heeft men, omdat de integraal $\int dx \sqrt{(1+p_1^2)}$ tusschen de gegevene grenzen gelijk L moet zijn,

$$n\,\text{Boog Sin.}\,\frac{x'' \pm a}{n} - n\,\text{Boog Sin.}\,\frac{x' \pm a}{n} = L.$$

§ 25

§ 25. AANMERKING. Wij hadden ook weder, aangezien $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, *enz.*, even als in § 22, kunnen besluiten tot de vergelijking

$$V = p_1 P_1 + Const. = p_1 P_1 \pm b,$$

en bijgevolg, daar $V = y + n\sqrt{(1 + p_1^2)}$ en $P_1 = \frac{np_1}{\sqrt{(1 + p_1^2)}}$ is,

$$y + n\sqrt{(1 + p_1^2)} = \frac{np_1^2}{\sqrt{(1 + p_1^2)}} \pm b,$$

en hieruit $p_1$ oplossende,

$$p_1 = \pm\sqrt{\frac{n^2 - (y \pm b)^2}{(y \pm b)^2}};$$

derhalve $$dx = \pm\frac{(y \pm b)\,dy}{\sqrt{(n^2 - (y \pm b)^2)}},$$

en $$x \pm a = \sqrt{(n^2 - (y \pm b)^2)},$$

of $$(x \pm a)^2 + (y \pm b)^2 = n^2;$$

even als boven.

§ 26. VOORBEELD IX. *Een volmaakt buigbaar touw, van eene gegevene lengte, wordt aan twee punten* A *en* B (*Fig.* 7) *opgehangen. Men vraagt naar de vergelijking der kromme lijn, welke dit touw, in rust zijnde, zal vormen.*

Wij zullen hier aannemen, dat het touw in alle deelen met hetzelfde gewigt bezwaard is; wordende alsdan de gezochte kromme de *gewone kettinglijn* genoemd.

De gevraagde kromme ligt blijkbaar in het verticale vlak, hetwelk door de punten A en B gaat, en het zwaartepunt Z van het touw zal zoo veel mogelijk genaderd zijn tot de horizontale lijn O C, welke beneden het touw, in het door A en B gaande verticale vlak wordt getrokken.

De afstand van het zwaartepunt Z tot aan de lijn O C is, volgens den bekenden statischen regel, gelijk aan de som der momenten van de afzonderlijke deelen des touws, gedeeld door de som der gewigten.

Men neme nu de horizontale lijn O C tot as van de $y$ en de verticale lijn O D tot as van de $x$; noeme $x'$, $y'$ de coördinaten van het gegevene punt A en $x''$, $y''$ de coördinaten van het gegevene punt B, en stelle het gewigt eener lengte-eenheid van het touw

touw $= w$, dan is de zwaarte van eene differentiaal des touws $= w\, d\, s\, \sqrt{(1 + p_1^2)}$ en het moment dezer differentiaal ten opzigte van de horizontale lijn O C $= w\, x\, d\, x\, \sqrt{(1 + p_1^2)}$.

Neemt men alzoo de integralen tusschen de grenzen $x'$, $y'$ en $x''$, $y''$, dan is

$$\textit{de som der gewigten} = w \int d\, x \sqrt{(1 + p_1^2)},$$
$$\textit{de som der momenten} = w \int x\, d\, x \sqrt{(1 + p_1^2)}.$$

Daar nu de som der momenten, gelijk aan het gewigt van het geheele touw, standvastig is, en de som der momenten gedeeld door de som der gewigten een minimum moet zijn, zoo moet blijkbaar de som der momenten een maximum wezen.

Wij hebben dus, volgens de vergelijking (10),

$$\delta \int (x + n)\, d\, x \sqrt{(1 + p_1^2)} = 0;$$

derhalve
$$V = (x + n) \sqrt{(1 + p_1^2)},$$

en
$$d\, V = \frac{(x + n)\, p_1\, d\, p_1}{\sqrt{(1 + p_1^2)}}.$$

In de vergelijking (7) is dus $Y = 0$, $P_1 = \frac{(x + n)\, p_1}{\sqrt{(1 + p_1^2)}}$, $P_2 = 0$, *enz.*; gevolgelijk wordt deze vergelijking

$$d\, \frac{(x + n)\, p_1}{\sqrt{(1 + p_1^2)}} = 0,$$

en derhalve
$$\frac{(x + n)\, p_1}{\sqrt{(1 + p_1^2)}} = \textit{Const.} = a.$$

Hieruit vindt men verder achtereenvolgend:

$$p_1 = \pm \sqrt{\frac{a^2}{(x + n)^2 - a^2}},$$

$$d\, y = \frac{a\, d\, x}{\pm \sqrt{[(x + n)^2 - a^2]}},$$

$$y = a\, \textit{Log.}\, \frac{x + n \pm \sqrt{[(x + n)^2 - a^2]}}{a'} \quad \ldots \quad (A)$$

De standvastigen $n$, $a$ en $a'$ worden bepaald uit de voorwaarde, dat de kromme door de gegevene punten A en B moet loopen, en dat het touw eene gegevene lengte moet hebben.

Stelt men, dat de punten A en B (Fig. 8) in dezelfde horizontale lijn zijn gelegen, en dat de as der abscisfen loodregt op het mid-

midden der lijn A B ſtaat, dan behooren met elke waarde van $x$ twee waarden van $y$ overeen te ſtemmen, welke ſlechts in teeken verſchillen, zoodat men in dit geval in het algemeen moet hebben:

$$a \, Log. \frac{x+n+\sqrt{[(x+n)^2-a^2]}}{a'} = -a \, Log. \frac{x+n-\sqrt{[(x+n)^2-a^2]}}{a'};$$

hieruit volgt $a'=a.$

Stelt men de lengte van het touw $=2$ L, dan is

$$L=\sqrt{[(x'+n)^2-a^2]},$$

en

$$y'=a \, Log. \frac{x'+n+L}{a};$$

door middel van deze vergelijkingen kunnen de ſtandvastigen $n$ en $a$ door benadering gevonden worden.

Voor het punt Q, alwaar de as der absciſſen de kromme lijn doorſnijdt, is $y=0$, en bijgevolg

$$x=OQ=a-n.$$

Verplaatst men nu den oorſprong der coördinaten uit O naar Q, en noemt men de nieuwe absciſſen $t$, dan is $x=a-n+t$. Door ſubſtitutie van deze waarde vindt men voor de vergelijking der kettinglijn

$$y=a \, Log. \frac{a+t\pm\sqrt{(2at+t^2)}}{a},$$

of

$$y=\pm a \, Log. \frac{a+t+\sqrt{(2at+t^2)}}{a}.$$

§ 27. Aanmerking. Had men, in Fig. 7, OC tot as van de $x$ en OD tot as van de $y$ aangenomen, dan zou men verkregen hebben:

$$\textit{de ſom der gewigten} = w\int dx \sqrt{(1+p_1^2)},$$
$$\textit{de ſom der momenten} = w\int y\,dx\sqrt{(1+p_1^2)},$$

en bijgevolg $\delta\int(y+n)\,dx\sqrt{(1+p_1^2)}=0.$

Wij hebben dus nu

$$V=(y+n)\sqrt{(1+p_1^2)},$$

en

$$dV=dy\sqrt{(1+p_1^2)}+\frac{(y+n)p_1\,dp_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}}.$$

In de vergelijking (7) is alzoo $Y=\sqrt{(1+p_1^2)}$,

$P_1=$

$P_1 = \frac{(y+n)p_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}}$, $P_2 = 0$, *enz.*; gevolgelijk wordt deze vergelijking.

$$dx\sqrt{(1+p_1^2)} - d\frac{(y+n)p_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}} = 0,$$

of, de differentiaal des tweeden terms ontwikkelende,

$$dx\sqrt{(1+p_1^2)} - \frac{p_1 dy}{\sqrt{(1+p_1^2)}} - \frac{(y+n)dp_1}{(1+p_1^2)\sqrt{(1+p_1^2)}} = 0.$$

Vermenigvuldigt men met $p_1\sqrt{(1+p_1^2)}$ en stelt men voor $p_1 dx$ hare waarde $dy$, dan verkrijgt men

$$dy - \frac{(y+n)p_1 dp_1}{1+p_1^2} = 0,$$

of
$$\frac{p_1 dp_1}{(1+p_1^2)} = \frac{dy}{y+n},$$

dus
$$Log.\sqrt{(1+p_1^2)} = Log.\frac{y+n}{a};$$

zijnde $a$ de constante, die men bij het integreren verkrijgt.

Hieruit heeft men verder achtereenvolgend:

$$\sqrt{(1+p_1^2)} = \frac{y+n}{a},$$

$$p_1 = \pm\frac{\sqrt{[(y+n)^2 - a^2]}}{a},$$

$$dx = \frac{\pm a\,dy}{\sqrt{[(y+n)^2 - a^2]}},$$

$$x = a\,Log.\frac{y+n\pm\sqrt{[(y+n)^2 - a^2]}}{a};$$

welke vergelijking met de vergelijking (A) geheel overeenstemt.

Men had hier ook weder mogen besluiten tot de vergelijking

$$V = p_1 P_1 + Const. = p_1 P_1 + a,$$

en bijgevolg, daar $V = (y+n)\sqrt{(1+p_1^2)}$ en $P_1 = \frac{(y+n)p_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}}$ is,

$$(y+n)\sqrt{(1+p_1^2)} = \frac{(y+n)p_1^2}{\sqrt{(1+p_1^2)}} + a,$$

waaruit men verder vindt

$$p_1 = \frac{\sqrt{[(y+n)^2 - a^2]}}{a},$$

even als boven.

VIER-

# VIERDE AFDEELING.

§ 28. Laat weder, even als in § 18, in de onbeftemde integraal $u = \int V d x$ de grootheid V eene functie zijn van $x, y, p_1, p_2$, *enz.*

In plaats echter van bepaaldelijk eene functie tusfchen de veranderlijke elementen $x$ en $y$ aan te nemen, kan men elk afzonderlijk in eene functie van eene derde veranderlijke grootheid $t$ uitdrukken, en alzoo ftellen:

$$F(x, t) = 0 \quad \text{en} \quad F_1(y, t) = 0.$$

Veranderde nu de eerfte dezer functiën, dan zouden voor dezelfde waarden van $t$ en $d t$, de waarden van $x$ en $d x$ eene zekere variatie ondergaan, welke men kan voorftellen door $\delta x$ en $\delta d x$.

Eveneens zouden, bij eene verandering der tweede functie, de waarden van $y$ en $d y$ voor dezelfde waarden van $t$ en $d t$ moeten variëren, en overgaan in $y + \delta y$ en $d y + \delta d y$.

Voorts zouden, wanneer eene dezer functiën of beide functiën te gelijk veranderden, de waarden van $p_1, p_2, p_3$, *enz.* overgaan in $p_1 + \delta p_1, p_2 + \delta p_2$, *enz.*

Stelt men nu, dat in de grootheid V de waarden van $x, y, p_1, p_2$, *enz.* overgaan in $x + \delta x, y + \delta y, p_1 + \delta p_1$, *enz.*, dan zal V overgaan in $V + \delta V$.

Vindt men dus door gewoon differentiëren:

$$d V = X d x + Y d y + P_1 d p_1 + P_2 d p_2 + \text{enz.},$$

dan zal men, de tweede en hoogere magten der variatiën verwaarloozende, ook hebben

$$\delta V = X \delta x + Y \delta y + P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + \text{enz.}$$

Nu is $\delta u = \int \delta (V d x) = \int (V \delta d x + d x \delta V)$

$$= \int V d \delta x + \int d x \delta V;$$

verder hebben wij door gedeeltelijk integreren

$$\int V d \delta x = V \delta x - \int \delta x d V,$$

bij-

bijgevolg

$$\delta u = V \delta x + \int (dx \delta V - \delta x d V).$$

Vermenigvuldigt men de boven opgegevene waarde van $\delta V$ met $dx$, en de waarde van $dV$ met $\delta x$, dan vindt men door aftrekking

$$dx \delta V - \delta x d V = Y (dx \delta y - \delta x dy) + P_1 (dx \delta p_1 - \delta x d p_1) + P_2 (dx \delta p_2 - \delta x d p_2) + enz.;$$

daar nu $p_1 = \frac{dy}{dx}$ is, zoo is $\delta p_1 = \frac{dx \delta dy - dy \delta dx}{dx^2}$, derhalve

$$dx \delta p_1 = \delta d y - p_1 \delta d x$$

en

$$dx \delta p_1 - \delta x d p_1 = d \delta y - (p_1 d \delta x + \delta x d p_1) = d(\delta y - p_1 \delta x).$$

Op gelijke wijze vindt men

$$dx \delta p_2 - \delta x d p_2 = d(\delta p_1 - p_2 \delta x);$$

ftelt men alzoo

$$\delta y - p_1 \delta x = \omega,$$

dan vindt men:

$$dx \delta y - \delta x dy = \omega dx,$$

$$dx \delta p_1 - \delta x d p_1 = d \omega,$$

$$dx \delta p_2 - \delta x d p_2 = d \frac{d\omega}{dx}.$$

Door fubftitutie van deze waarden wordt

$$dx \delta V - \delta x d V = Y \omega dx + P_1 d\omega + P_2 d \frac{d\omega}{dx} + enz.;$$

gevolgelijk

$$\delta u = V \delta x + \int Y \omega dx + \int P_1 d\omega + \int P_2 d \frac{d\omega}{dx} + enz.$$

Verder heeft men door gedeeltelijk integreren:

$$\int P_1 d\omega = P_1 \omega - \int \frac{dP}{dx} \omega dx,$$

$$\int P_2 d \frac{d\omega}{dx} = P_2 \frac{d\omega}{dx} - \frac{dP_2}{dx} \omega + \int \frac{1}{dx} d \frac{dP_2}{dx} \omega dx;$$

fubftituëert men deze waarden, dan verkrijgt men eindelijk

$$\delta u = V \delta x + \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + enz.\right) \omega + (P_2 - enz.) \frac{d\omega}{dx} + enz.$$

$$+ \int \left(Y - \frac{dP_1}{dx} + \frac{1}{dx} d \frac{dP_2}{dx} - enz.\right) \omega dx \; . \; . \quad (11).$$

§ 29.

§ 29. Had men d $x$ in de onbeſtemde integraal $u = \int V dx$, onder het integraalteeken niet afgezonderd, dan kon deze integraal voorgeſteld worden door $u = \int Z$; zijnde $Z$ eene functie van de veranderlijke elementen $x$ en $y$ en derzelver differentialen. De bepaling van $\delta u$ is nu zeer gemakkelijk.

Laat, namelijk, door den gewonen algorithmus der differentiaal-rekening, gevonden zijn:

$$\delta Z = X \delta x + X_1 \delta d x + X_2 \delta d^2 x + X_3 \delta d^3 x + \textit{enz.}$$
$$+ Y \delta y + Y_1 \delta d y + Y_2 \delta d^2 y + Y_3 \delta d^3 y + \textit{enz.},$$

dan is vooreerst

$$\delta u = \int X \delta x + \int X_1 d \delta x + \int X_2 d^2 \delta x + \textit{enz.}$$
$$+ \int Y \delta y + \int Y_1 d \delta y + \int Y_2 d^2 \delta y + \textit{enz.}$$

Herleidt men nu door gedeeltelijk integreren deze integralen zoo lang tot dat er geene differentialen van $\delta x$ en $\delta y$ meer onder de integraalteekens voorkomen, dan vindt men ligtelijk

$$\delta u = (X_1 - dX_2 + d^2 X_3 - \textit{enz.}) \delta x + (X_2 - dX_3 + \textit{enz.}) d \delta x + (X_3 - dX_4 + \textit{enz.}) d^2 \delta x + \textit{enz.}$$
$$+ (Y_1 - dY_2 + d^2 Y_3 - \textit{enz.}) \delta y + (Y_2 - dY_3 + \textit{enz.}) d \delta y + (Y_3 - dY_4 + \textit{enz.}) d^2 \delta y + \textit{enz.}$$
$$+ \int (X - d X_1 + d^2 X_2 - d^3 X_3 + \textit{enz.}) \delta x$$
$$+ \int (Y - d Y_1 + d^2 Y_2 - d^3 Y_3 + \textit{enz.}) \delta y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

§ 30. Wanneer $u = \int Z$, tusſchen gegevene grenzen, een maximum of minimum zal zijn, dan moet de variatie van $u$ in zoo ver dezelve afhangt van de eerſte magten der variatiën van $x$, $y$, d $x$, d $y$, *enz.*, gelijk nul wezen. Dit kan echter, behoudens de onderlinge onafhankelijkheid van $\delta x$ en $\delta y$ in het algemeen niet plaats hebben, ten zij de coëfficiënten van $\delta x$ en $\delta y$ onder de integraalteekens elk afzonderlijk gelijk nul zijn, en men alzoo hebbe:

$$X - d X_1 + d^2 X_2 - d^3 X_3 + \textit{enz.} = 0 \quad . \quad . \quad (13),$$
$$Y - d Y_1 + d^2 Y_2 - d^3 Y_3 + \textit{enz.} = 0 \quad . \quad . \quad (14).$$

Uit de vergelijking (11) blijkt echter, dat de coëfficiënten van $\delta x$ en $\delta y$ onder het integraalteeken eenen gemeenſchappelijken factor hebben, zoodat in elk bijzonder geval de vergelijking (13) door d $y$ gedeeld zijnde, hetzelfde moet opleveren als de vergelijking (14), negatief genomen, gedeeld door d $x$; weshalve men uit deze differentiaal-vergelijkingen, wanneer bij het integreren de conſtanten be-

behoorlijk bepaald worden, altijd dezelfde betrekking tusfchen $x$ en $y$ zal vinden.

Naardien de vergelijking (12) een bijzonder geval is van de algemeene vergelijking (27), welke in de Zevende Afdeeling § 42 zal worden opgegeven en toegepast, zoo zullen wij ons hier flechts behoeven te bepalen bij de vergelijking (11), die de variatie van $u = \int V \, dx$ voorftelt.

§ 31. Het tweede lid van de vergelijking (11) kan in het algemeen niet nul zijn, ten zij men hebbe

$$Y - \frac{d P_1}{d x} + \frac{1}{d x} \, d \frac{d P_2}{d x} - enz. = 0 \quad . \quad . \quad (15).$$

Uit deze differentiaal-vergelijking kan door integreren eene betrekking tusfchen $x$ en $y$ gevonden worden. De functiën $F(x, t) = 0$ en $F_1(y, t) = 0$ zijn daardoor echter nog niet geheel bepaald. Men mag nu nog de eene naar willekeur aannemen, doch dan moet de andere zoodanig bepaald worden, dat de betrekking tusfchen $x$ en $y$, welke uit die twee functiën voortvloeit, overeenftemt met die, welke uit de vergelijking (15) wordt afgeleid. Hieruit volgt, dat de variatiën van $x$ en $y$ nog geheel onbepaald zijn, en derzelver verhouding alle denkbare waarden kan hebben.

De vergelijking (11) wordt nu, voor $u$ hare waarde ftellende,

$$\delta u = (V - p_1 P_1 + enz.)\delta x + \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} + enz.\right)\delta y + enz. + Conft.$$

of, kortheidshalve den coëfficiënt van $\delta x$ door $\alpha$, en den coëfficiënt van $\delta y$ door $\beta$ voorftellende,

$$\delta u = \alpha \delta x + \beta \delta y + enz. + Conft. \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Wanneer de integraal $u = \int V \, dx$ tusfchen de grenzen $x'$, $y'$ en $x''$, $y''$ een maximum of minimum moet zijn, dan behoort ook de variatie van $u$ tusfchen deze grenzen genomen te worden. Stelt men alzoo de waarden van $\alpha$ en $\beta$ bij het begin der integraal voor door $\alpha'$ en $\beta'$, en bij het einde der integraal door $\alpha''$ en $\beta''$, dan moet men, wanneer er een maximum of minimum zal zijn, nog hebben:

$$\alpha'' \delta x'' + \beta'' \delta y'' + enz. - \alpha' \delta x' - \beta' \delta y' - enz. = 0 \quad (17).$$

De grenzen, binnen welke de integraal een maximum of minimum moet zijn, kunnen als ftandvastig en ook als veranderlijk be-

fchouwd

schouwd worden. In het laatste geval worden door de vergelijking (17) de tot het maximum of minimum gevorderde grenzen bepaald, zoo als uit de oplossing der volgende voorbeelden zal blijken.

§ 32. VOORBEELD X. *Van al de lijnen, welke uit een gegeven punt A (Fig. 9) naar eene gegevene kromme kunnen getrokken worden, die te bepalen, welke een maximum of minimum is.*

Wij vinden vooreerst, even als in § 20, dat de vergelijking der gevraagde lijn in het algemeen is $y = a x + b$.

De gevraagde lijn moet dus eene regte lijn wezen, welke uit het gegeven punt A naar eenig punt B der gegevene kromme is getrokken.

De coördinaten van het punt A zijn standvastig; bijgevolg zijn $\delta x'$ en $\delta y'$ beide gelijk nul.

Het punt B echter kan zich langs de gegevene kromme BC verplaatsen.

Stelt men zich eene oneindig kleine verplaatsing voor van B naar B′, dan is $\frac{\delta y''}{\delta x''}$ gelijk aan de differentiaal-verhouding van de coördinaten der gegevene kromme in het punt B, en bijgevolg gelijk aan den tangens van den boek BTX, dien de raaklijn BT met de as der abscisfen maakt.

Wij hebben, even als in § 20,

$$V = \sqrt{(1+p_1^2)}, \quad P_1 = \frac{p_1}{\sqrt{(1+p_1^2)}}, \quad P_2 = 0, \ \textit{enz.};$$

in de vergelijking (17) is dus $\alpha'' = \frac{1}{\sqrt{(1+p''^2_1)}}$, $\beta'' = \frac{p''_1}{\sqrt{(1+p''^2_1)}}$;
deze vergelijking wordt alzoo, aangezien $\delta x'$ en $\delta y'$ beide gelijk nul zijn,

$$\frac{1}{\sqrt{(1+p''^2_1)}}\,\delta x'' + \frac{p''_1}{\sqrt{(1+p''^2_1)}}\,\delta y'' = 0,$$

derhalve
$$\frac{\delta y''}{\delta x''} = -\frac{1}{p''_1}.$$

Nu is $p''_1 = \frac{d\,y''}{d\,x''} = \textit{Tang.}\,BDT$ en $\frac{1}{p''_1} = \textit{Cot.}\,BDT$,

derhalve $\textit{Cot.}\,BDT = -\textit{Tang.}\,BTX = \textit{Tang.}\,BTD.$

De

De hoek B D T is bijgevolg het complement van den hoek B T K. *De gevraagde lijn doorsnijdt dus de gegevene kromme in het punt* B *regthoekig*.

§ 33. Aanmerking. Lag ook het punt A in eene gegevene kromme A E, dan zoude voor eene oneindig kleine verplaatsing van dit punt, $\frac{\delta y'}{\delta x'}$ gelijk zijn aan den tangens van den hoek A S X, dien de raaklijn A S, welke de kromme A E in E aanraakt, met de as der abscisfen maakt.

Daar nu $\delta x'$ en $\delta y'$ onafhankelijk zijn van $\delta x''$ en $\delta y''$, zoo heeft men, uit de vergelijking (17), de afzonderlijke vergelijkingen

$$\alpha' \delta x' + \beta' \delta y' = 0,$$
$$\alpha'' \delta x'' + \beta'' \delta y'' = 0.$$

Hieruit kan men weder besluiten, *dat de gevraagde lijn beide krommen regthoekig moet doorsnijden*.

§ 34. Wanneer de grenzen, tusschen welke de integraal $u = \int V\, d\, x$ een maximum of minimum moet wezen, onder zekere voorwaarden veranderlijk zijn, en sommige coördinaten dezer veranderlijke grenzen reeds in V voorkomen, dan behoort men aan de in § 28 opgegevene waarde der variatie van V nog eene verbetering toe te brengen. Kwam, bij voorbeeld, de ordinaat $x'$ reeds in V voor, dan wordt dezelve bij het differentiëren als standvastig beschouwd; besluit men nu uit de differentiaal van V

$$d\, V = X\, d\, x + Y\, d\, y + P_1\, d\, p_1 + enz.,$$

tot de variatie

$$\delta V = X\, \delta x + Y\, \delta y + P_1\, \delta p_1 + enz.,$$

dan ontbreekt er aan deze variatie nog eenen term $T\, \delta x'$, die uit de veranderlijkheid van $x'$ ontstaat. Bijgevolg ontbreekt alsdan, aan de in vergelijking (11) opgegevene variatie der integraal $u = \int V\, d\, x$, nog den term $\int T\, \delta x'\, d\, x = \delta x' \int T\, d\, x$; moetende nu blijkbaar de integraal $\int T\, d\, x$ tusschen dezelfde grenzen genomen worden als $u = \int V\, d\, x$.

§ 35. Voorbeeld XI. *In een verticaal vlak zijn gegeven twee kromme lijnen* A C *en* B D (*Fig.* 10). *Men begeert de kromme lijn* A B *te bepalen, langs welke een ligchaam in*

*den kortsten tijd, uit eenig punt* A *der eerste kromme naar eenig punt* B *der tweede kan vallen.*

Laat de verticale lijn O E tot as van de $x$ en de horizontale lijn O F tot as van de $y$ aangenomen worden.

Men noeme $x'$, $y'$ de coördinaten van het punt A en $x''$, $y''$ de coördinaten van het punt B.

Trekt men uit het punt A de horizontale lijn A G, welke de uit eenig punt M der loopbaan getrokkene loodlijn M N in G ontmoet, dan is de snelheid van het vallende ligchaam in het punt M gelijk aan de snelheid na den vrijen val door de loodlijn M G $= x - x'$.

De snelheid in het punt M is alzoo $= 2\sqrt{g(x-x')}$ en wij vinden dus, op gelijke wijze als in § 21,

$$T = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx\sqrt{(1+p_1^2)}}{\sqrt{(x-x')}}.$$

Gevolgelijk hebben wij:

$$u = \int \frac{dx\sqrt{(1+p_1^2)}}{\sqrt{(x-x')}},$$

$$V = \sqrt{\frac{1+p_1^2}{x-x'}},$$

en $$dV = \frac{-dx\sqrt{(1+p_1^2)}}{2\sqrt{(x-x')^3}} + \frac{p_1\,dp_1}{\sqrt{(x-x')(1+p_1^2)}}.$$

In de vergelijking (15) is dus $Y = 0$, $P_1 = \frac{p_1}{\sqrt{(x-x')(1+p_1^2)}}$, $P_2 = 0$, *enz.*; gevolgelijk wordt deze vergelijking

$$d\,\frac{p_1}{\sqrt{(x-x')(1+p_1^2)}} = 0,$$

derhalve $$\frac{p_1}{\sqrt{(x-x')(1+p_1^2)}} = Const. = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

Hieruit vindt men verder

$$p_1 = \sqrt{\frac{x-x'}{2a-(x-x')}}$$

en

$$y = -\sqrt{[2a(x-x')-(x-x')^2]} + aB.Sin.Vers.\frac{x-x'}{a} + Const.$$

*De gevraagde kromme is alzoo eene Cycloïde, welker basis langs de door* A *getrokkene horizontale lijn* A G *valt.*

Daar

Daar het punt A zich langs de kromme AC kan verplaatsen, en de ordinate $x'$ reeds in V voorkomt, zoo behoort men, volgens het in § 34 aangemerkte, bij de variatie van $\int \frac{dx\sqrt{(1+p_1^2)}}{\sqrt{(x-x')}}$ nog te voegen den term $\delta x' \int \frac{dx\sqrt{(1+p_1^2)}}{2\sqrt{(x-x')^3}}$.

De vergelijking (17) wordt dienvolgens

$$\alpha''\delta x''+\beta''\delta y''-\alpha'\delta x'-\beta'\delta y'+\delta x' \int \frac{dx\sqrt{(1+p_1^2)}}{2\sqrt{(x-x')^3}} \ldots (A).$$

Stelt men in de uitdrukking onder het integraalteeken voor $p_1$ hare waarde, dan vindt men

$$\int \frac{dx\sqrt{(1+p_1^2)}}{2\sqrt{(x-x')^3}} = \int \frac{dx\sqrt{2a}}{2\sqrt{(x-x')^3(2a-(x-x'))}},$$

$$= Const. - \sqrt{\frac{2a-(x-x')}{2a(x-x')}},$$

$$= Const. - \frac{1}{p_1\sqrt{2a}}.$$

Neemt men deze integraal tusschen de grenzen $x=x'$ en $x=x''$, dan wordt dezelve, de waarden van $p_1$, welke met $x'$ en $x''$ overeenstemmen, $p'_1$ en $p''_1$ noemende,

$$\int \frac{dx\sqrt{(1+p_1^2)}}{2\sqrt{(x-x')^3}} = \frac{1}{p'_1\sqrt{2a}} - \frac{1}{p''_1\sqrt{2a}}.$$

Daar insgelijks $\alpha = V - p_1 P_1 = \frac{1}{\sqrt{(x-x')(1+p_1^2)}} = \frac{1}{p_1\sqrt{2a}}$ is, zoo is ook

$$\int \frac{dx\sqrt{(1+p_1^2)}}{2\sqrt{(x-x')^3}} = \alpha' - \alpha''.$$

De vergelijking (A) wordt bijgevolg

$$\alpha''\delta x''+\beta''\delta y''-\alpha''\delta x'-\beta'\delta y'=0.$$

Uit deze vergelijking volgt verder, aangezien $\delta x''$ en $\delta y''$ onafhankelijk zijn van $\delta x'$ en $\delta y'$,

$$\alpha''\delta x''+\beta''\delta y''=0,$$
$$\alpha''\delta x'+\beta'\delta y'=0;$$

derhalve $$\frac{\delta y'}{\delta x'} = -\frac{\alpha''}{\beta'}$$

en $$\frac{\delta y''}{\delta x''} = -\frac{\alpha''}{\beta''}.$$

 Daar

Daar nu $\beta = P_1 = \frac{1}{\sqrt{2a}}$, en bijgevolg $\beta' = \beta''$ is, zoo volgt hieruit

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{\partial y''}{\partial x''}.$$

*De raaklijn* A S, *welke de kromme* A C *in het punt* A *aanraakt, loopt dus evenwijdig aan de raaklijn* B T, *die in het punt* B *aan de kromme* B D *wordt getrokken.*

Daar verder $\alpha' = \frac{1}{p''_1 \sqrt{2a}}$ en $\beta' = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ is, zoo hebben wij ook nog

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = -\frac{1}{p''_1}.$$

De raaklijn, welke de kromme B D in het punt B aanraakt, staat dus loodregt op de raaklijn, die in het punt B aan de loopbaan A M B wordt getrokken. *De kromme* B D *wordt derhalve door de loopbaan regthoekig doorsneden.*

§ 36. Aanmerking. Had men de horizontale lijn O F tot as van de $x$ en de verticale lijn O E tot as van de $y$ aangenomen, dan zou men gevonden hebben

$$T = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{dx \sqrt{(1 + p_1^2)}}{\sqrt{(y - y')}}.$$

Men heeft dus alsdan

$$u = \int \frac{dx \sqrt{(1 + p_1^2)}}{\sqrt{(y - y')}},$$

$$V = \sqrt{\frac{1 + p_1^2}{y - y'}},$$

en $$dV = -\frac{dy \sqrt{(1 + p_1^2)}}{2\sqrt{(y - y')^3}} + \frac{p_1 \, dp_1}{\sqrt{(y - y')(1 + p_1^2)}};$$

bijgevolg $$Y = \frac{-\sqrt{(1 + p_1^2)}}{2\sqrt{(y - y')^3}} \text{ en } P_1 = \frac{p_1}{\sqrt{(y - y')(1 + p_1^2)}}.$$

Uit de vergelijkingen

$$dV = Y\,dy + P_1\,dp_1 \quad \text{en} \quad Y\,dx - dP_1 = 0,$$

volgt nu verder

$$V = p_1 P_1 + Const. = p_1 P_1 + \frac{1}{\sqrt{2a}},$$

waaruit men ligtelijk vindt

$$p_1 = \sqrt{\frac{2a - (y - y')}{y - y'}}$$

en

en $x = Const. - \sqrt{[2a(y-y') - (y-y')^2]} + a\,B.\,Sin.\,Vers.\,\frac{y-y'}{a}$.

Hieruit blijkt weder, *dat de gevraagde kromme eene Cycloïde is, welker basis langs de horizontale lijn* A G *valt.*

Daar $y'$ reeds in V voorkomt, zoo wordt de vergelijking (17)

$$\alpha''\delta x'' + \beta''\delta y'' - \alpha'\delta x' - \beta'\delta y' + \delta y' \int \frac{\sqrt{(1+p_1^2)}}{2\sqrt{(y-y')^3}}\, dx,$$

of, omdat $Y = \frac{-\sqrt{(1+p_1^2)}}{2\sqrt{(y-y')^3}}$ is,

$$\alpha''\delta x'' + \beta''\delta y'' - \alpha'\delta x' - \beta'\delta y' - \delta y' \int Y\, dx \ldots (B).$$

Nu volgt uit de vergelijking

$$Y\, dx - dP_1 = 0,$$

$$\int Y\, dx = P_1 + Const.;$$

neemt men deze integraal tusschen de grenzen $x'$, $y'$ en $x''$, $y''$, dan wordt

$$\int Y\, dx = P''_1 - P'_1 = \beta'' - \beta'.$$

De vergelijking (B) wordt dus

$$\alpha''\delta x'' + \beta''\delta y'' - \alpha'\delta x' - \beta''\delta y' = 0.$$

Uit deze vergelijkingen kan men, aangezien $\delta x'$ en $\delta y'$ onafhankelijk zijn van $\delta x''$ en $\delta y''$, wederom besluiten tot de twee afzonderlijke

$$\left.\begin{array}{l}\alpha''\delta x'' + \beta''\delta y'' = 0,\\ \alpha'\delta x' + \beta''\delta y' = 0,\end{array}\right\} \ldots\ldots (C).$$

Naardien $\alpha = V - p_1 P_1 = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ en $\beta = P_1 = \frac{p_1}{\sqrt{(y-y')(1+p_1^2)}}$ $= \frac{p_1}{\sqrt{2a}}$ is, zoo is $\alpha' = \alpha'' = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ en $\beta'' = \frac{p''_1}{\sqrt{2a}}$.

Stelt men deze waarden in de vergelijkingen (C) en vermenigvuldigt men vervolgens met $\sqrt{2a}$, dan veranderen dezelve in;

$$\delta x'' + p''_1\,\delta y'' = 0,$$

en

$$\delta x' + p''_1\,\delta y' = 0;$$

gevolgelijk is

$$\frac{\delta y''}{\delta x''} = \frac{\delta y'}{\delta x'} = -\frac{1}{p''_1} = -\frac{dx''}{dy''}.$$

Hieruit volgt weder, *dat de raaklijn, welke de kromme* B D *in* B *aanraakt, de loopbaan* A M B *regthoekig zal doorsnijden, en evenwijdig zal loopen aan de raaklijn, welke de kromme* A C *in* A *aanraakt.*

---

VIJFDE

# VIJFDE AFDEELING.

§ 37. Laat V eene functie voorstellen van $x, y, z, p_1, p_2, q_1, q_2$, *enz.* $\left(\text{zijnde } p_1 = \frac{dy}{dx}, p_2 = \frac{dp_1}{dx}, q_1 = \frac{dz}{dx}, q_2 = \frac{dq_1}{dx}, \textit{enz.}\right)$

De integraal-uitdrukking $u = \int V\,dx$ zal bestemd worden, wanneer de veranderlijke elementen $x$, $y$ en $z$ elk afzonderlijk in functiën eener veranderlijke grootheid $t$ gegeven zijn, en men alzoo aanneemt $F(x, t) = o$, $F_1(y, t) = o$, $F_2(z, t) = o$.

Om nu de uit eene verandering dezer functiën ontstaande variatie van $u$ te vinden, in zoo ver dezelve afhangt van de eerste magten der variatiën van $x, y, z, p_1$, *enz.*, hebben wij vooreerst, even als in § 28,

$$\delta u = V\,\delta x + \int (dx\,\delta V - \delta x\,dV).$$

Vindt men nu door differentiëren

$$dV = X\,dx + Y\,dy + P_1\,dp_1 + P_2\,dp_2 + \textit{enz.},$$
$$+ Z\,dz + Q_1\,dq_1 + Q_2\,dq_2 + \textit{enz.},$$

dan heeft men ook

$$\delta V = X\,\delta x + Y\,\delta y + P_1\,\delta p_1 + P_2\,\delta p_2 + \textit{enz.},$$
$$+ Z\,\delta z + Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \textit{enz.},$$

en bijgevolg

$$(dx\,\delta V - \delta x\,dV) = Y\,dx(\delta y - p_1\,\delta x) + P_1\,dx(\delta p_1 - p_2\,\delta x) + \textit{enz.}$$
$$+ Z\,dx(\delta z - q_1\,\delta x) + Q_1\,dx(\delta q_1 - q_2\,\delta x) + \textit{enz.}$$

Stelt men alzoo

$$\delta y - p_1\,\delta x = \omega_1,$$
$$\delta z - q_1\,\delta x = \omega_2,$$

dan vindt men, op gelijke wijze als in § 28, de integralen zoo lang herleidende, tot dat er geene differentialen van $\omega_1$ of $\omega_2$ meer onder de integraalteekens voorkomen,

$\delta u =$

$$\partial u = V\partial x + \left(P_1 - \frac{d\,P_2}{d\,x} + enz.\right)\omega_1 + enz.$$
$$+ \left(Q_1 - \frac{d\,Q_2}{d\,x} + enz.\right)\omega_2 + enz.,$$
$$+ \int\left(Y - \frac{d\,P_1}{d\,x} + enz.\right)\omega_1\,d\,x,$$
$$+ \int\left(Z - \frac{d\,Q_1}{d\,x} + enz.\right)\omega_2\,d\,x \;\ldots\; (18).$$

Neemt men nu aan, dat er geene bijzondere betrekking tusfchen $\partial x$, $\partial y$ en $\partial z$ bestaat, dan zal men vooreerst hebben, om de variatie van $u$, in zoo ver die afhangt van de eerste magten van $\partial x$, $\partial y$, *enz.*, te doen verdwijnen,

$$Y - \frac{d\,P_1}{d\,x} + enz. = 0 \;\ldots\ldots\; (19),$$
$$Z - \frac{d\,Q_1}{d\,x} + enz. = 0 \;\ldots\ldots\; (20).$$

Uit deze differentiaal-vergelijkingen vindt men de, tot het maximum of minimum van $u$ gevorderde, betrekking tusfchen $x$ en $y$ en tusfchen $x$ en $z$.

De vergelijking (18) wordt nu, voor $\omega_1$ en $\omega_2$ derzelver waarden fchrijvende,

$$\partial u = (V - p_1 P_1 - q_1 Q_1 + enz.)\partial x$$
$$+ (P_1 - enz.)\partial y + (Q_1 - enz.)\partial z + enz. + Const.,$$

of, de coëfficiënten van $\partial x$, $\partial y$ en $\partial z$ kortheidshalve $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$ noemende,

$$\partial u = \alpha\partial x + \beta\partial y + \gamma\partial z + enz. + Const.$$

Neemt men deze variatie tusfchen de grenzen $x'$, $y'$, $z'$ en $x''$, $y''$, $z''$, dan wordt nog tot het maximum of minimum gevorderd

$$\alpha''\partial x'' + \beta''\partial y'' + \gamma''\partial z'' + enz. - \alpha'\partial x' - \beta'\partial y' - \gamma'\partial z' - enz. = 0 \;(21).$$

§ 38. VOORBEELD XII. *De kortste lijn te bepalen, welke uit een gegeven punt naar een gegeven oppervlak kan getrokken worden.*

Noemt men de lengte der lijn $u$, dan is in het algemeen

$$u = \int d\,x\,\sqrt{(1 + p_1^2 + q_1^2)}.$$

Wij

Wij hebben dus

$$V = \sqrt{(1 + p_1^2 + q_1^2)},$$

$$dV = \frac{p_1 dp_1}{V} + \frac{q_1 dq_1}{V},$$

derhalve $X = o$, $Y = o$, $P_1 = \frac{p_1}{V}$, $P_2 = o$, *enz.*;

$$Z = o, \; Q_1 = \frac{q_1}{V}, \; Q_2 = o, \; enz.$$

De vergelijkingen (19) en (20) worden dus

$$d\frac{p_1}{V} = o \quad \text{en} \quad d\frac{q_1}{V} = o;$$

bijgevolg $\frac{p_1}{V} = Const.$ en $\frac{q_1}{V} = Const.$

Hieruit volgt verder, daar $V^2 = 1 + p_1^2 + q_1^2$ is,

$$p_1 = Const. = a, \quad q_1 = Const. = a_1,$$

en wij hebben dus

$$dy = a\,dx \quad \text{en} \quad dz = a_1\,dx,$$

derhalve $y = ax + Const.$ en $z = a_1 x + Const.$

*De gevraagde lijn is alzoo eene regte lijn.*

Daar de lijn uit een gegeven punt moet getrokken worden, zoo zijn $\delta x'$, $\delta y'$ en $\delta z'$ elk gelijk nul; dienvolgens wordt de vergelijking (21)

$$\alpha''\delta x'' + \beta''\delta y'' + \gamma''\delta z'' = o.$$

Hieruit vindt men verder, voor de coëfficiënten derzelver waarden schrijvende,

$$\delta x'' + p''_1\delta y'' + q''_1\delta z'' = o,$$

of, $dx''\delta x'' + dy''\delta y'' + dz''\delta z'' = o.$

Neemt men nu in aanmerking, dat $\frac{\delta y''}{\delta x''}$ en $\frac{\delta z''}{\delta x''}$, voor oneindig kleine waarden der variatiën, de differentiaal-verhoudingen voorstellen der coördinaten van het gebogen oppervlak in het punt, alwaar de gevraagde lijn dit vlak ontmoet, dan kan men uit de bovenstaande vergelijking besluiten, *dat het gebogen vlak door de gevraagde lijn loodregt wordt doorsneden.*

---

ZESDE

# ZESDE AFDEELING.

§ 39. Laat de grootheid V op eene gegevene wijze gevormd worden uit de functie $z = F(x, y)$ en uit de gedeeltelijke differentiaal-verhoudingen $p_1 = \frac{dz}{dx}$, $q_1 = \frac{dz}{dy}$, $p_2 = \frac{d_2 z}{dx^2}$, $q_2 = \frac{d^2 z}{dy^2}$, $r_2 = \frac{d^2 z}{dx\,dy}$, $p_3 = \frac{d^3 z}{dx^3}$, *enz.*

Nemen wij nu aan, dat er tusschen $x$ en $y$ geene bepaalde betrekking bestaat, en dat in de integraal-uitdrukking $u = \int\int V\,dx\,dy$ de integralen tusschen gegevene grenzen moeten genomen worden, dan zal men de waarde van $u$ verkrijgen door eerst ten opzigte van $x$ en dan ten opzigte van $y$, of eerst ten opzigte van $y$ en dan ten *opzigte* van $x$ te integreren. Zoodat men zal hebben

$$u = \int_y dy \int_x V\,dx = \int_x dx \int_y V\,dy.$$

Verandert de functie $z = F(x, y)$ dan zullen voor dezelfde waarden van $x$, $y$, $dx$ en $dy$, de waarden van $z$, $p_1$, $q_1$, $p_2$, *enz.* variëren, en dienvolgens ook de waarden van V en $u$.

Laat door differentiëren gevonden zijn

$$dV = Z\,dz + P_1\,dp_1 + Q_1\,dq_1 + P_2\,dp_2 + Q_2\,dq_2 + R_2\,dr_2 + enz.$$

dan is ook

$$\delta V = Z\,\delta z + P_1\,\delta p_1 + Q_1\,\delta q_1 + P_2\,\delta p_2 + Q_2\,\delta q_2 + R_2\,\delta r_2 + enz.$$

Stelt men deze waarde in

$$\delta u = \int\int dx\,dy\,\delta V,$$

dan wordt

$$\delta u = \int\int (Z\,\delta z + P_1\,\delta p_1 + Q_1\,\delta q_1 + enz.)\,dx\,dy.$$

Daar $dx$ en $dy$ niet variëren, zoo is $\delta p_1 = \frac{d\,\delta z}{dx}$, $\delta q_1 = \frac{d\,\delta z}{dy}$, $\delta p_2 = \frac{d^2\,\delta z}{dx^2}$, $\delta q_2 = \frac{d^2\,\delta z}{dy^2}$, $\delta r_2 = \frac{d^2\,\delta z}{dx\,dy}$, *enz.*

Hierdoor

Hierdoor wordt

$$\int\int P_1 \delta p_1 dxdy = \int_y dy \int_x P_1 \frac{d\delta z}{dx} dx = \int_y P_1 \delta z dy - \int\int \frac{dP_1}{dx} \delta z dx dy.$$

Op gelijke wijze vinden wij:

$$\int\int Q_1 \delta q_1 dxdy = \int_x Q_1 \delta z dx - \int\int \frac{dQ_1}{dy} \delta z dx dy,$$

$$\int\int P_2 \delta p_2 dxdy = \int_y \left(P_2 \frac{d\delta z}{dx} - \frac{dP_2}{dx} \delta z\right) dy + \int\int \frac{d^2P_2}{dx^2} \delta z dx dy,$$

$$\int\int Q_2 \delta q_2 dxdy = \int_x \left(Q_2 \frac{d\delta z}{dy} - \frac{dQ_2}{dy} \delta z\right) dx + \int\int \frac{d^2Q_2}{dy^2} \delta z dx dy,$$

$$\int\int R_2 \delta r_2 dxdy = R_2 \delta z - \int_x \frac{dR_2}{dx} \delta z dx - \int_y \frac{dR_2}{dy} \delta z dy + \int\int \frac{d^2R_2}{dx\,dy} \delta z dx dy;$$

door fubftitutie van deze waarden, vindt men

$$\delta u = (R_2 - enz.) \delta z + enz.$$

$$+ \int_x \left(Q_1 - \frac{dQ_2}{dy} - \frac{dR_2}{dx} + enz.\right) \delta z dx + \int_x (Q_2 - enz.) \frac{d\delta z}{dy} dx + enz.$$

$$+ \int_y \left(P_1 - \frac{dP_2}{dx} - \frac{dR_2}{dy} + enz.\right) \delta z dy + \int_y (P_2 - enz.) \frac{d\delta z}{dx} dy + enz.$$

$$+ \int\int \left(Z - \frac{dP_1}{dx} - \frac{dQ_1}{dy} + \frac{d^2P_2}{dx^2} + \frac{d^2Q_2}{dy^2} + \frac{d^2R_2}{dx\,dy} - enz.\right) \delta z dx dy.$$

Zal nu voor zekere functie $z = F(x, y)$ de waarde van $u$, tusfchen gegevene grenzen, een maximum of minimum zijn, dan behoort de waarde van $\delta u$, in zoo ver dezelve van de eerfte magten van $\delta z$, $\delta p_1$ enz. afhangt, gelijk nul te wezen. Dit kan echter niet plaats hebben, ten zij men hebbe

$$Z - \frac{dP_1}{dx} - \frac{dQ_1}{dy} + \frac{d^2P_2}{dx^2} + \frac{d^2Q_2}{dy^2} + \frac{d^2R_2}{dx\,dy} - enz. = 0. \quad (22).$$

Tot het maximum of minimum wordt dus gevorderd, dat $z = F(x, y)$ in het algemeen aan de differentiaal-vergelijking (22) voldoet.

§ 40. VOORBEELD XIII. *Laten* OX, OY *en* OZ (*Fig.* 11) *drie onderling regthoekige coördinaten-asfen zijn. Men neme op de as* OX *de ftukken* OA $= x'$, OB $= x''$, *en brenge door de punten* A *en* B, *loodregt op* OX, *de vlakken* A a'

*en*

*en* B b b′, *welke een gebogen oppervlak, dat* $z = F(x, y)$ *tot vergelijking heeft, volgens* a′ c″ *en* b′ c′ *doorsnijden. Verder neme men op de as* O Y, *de stukken* $OC = y'$ *en* $OD = y''$, *en brenge door de punten* C *en* D, *loodregt op* O Y, *de vlakken* C c c′ *en* D b b′, *welke hetzelfde gebogen oppervlak volgens* c″ c′ *en* a′ b′ *doorsnijden.*

*Wanneer nu het ligchaam besloten tusschen gemelde loodregte vlakken, het gebogen oppervlak en het vlak van de* $xy$ *een maximum of minimum is, terwijl het gedeelte des oppervlaks, begrepen tusschen de bogen* a′ b′, b′ c′, c′ c″ *en* c″ a′ *eene gegevene grootte heeft, zoo vraagt men naar eene differentiaal-vergelijking, waaraan de vergelijking van het oppervlak moet voldoen.*

Men trekke uit eenig punt P van het gebogen oppervlak eene loodlijn P Q op het vlak van de $xy$, en uit het voetpunt Q dezer loodlijn de lijnen Q M en Q N loodregt op de assen O X en O Y, dan is $PQ = z$, $OM = x$, $ON = y$.

Men late nu $OM = x$ met het lijntje M M′ aangroeijen en $ON = y$ met het lijntje N N′, en trekke uit de punten M′ en N′ de lijnen M′ Q′ en N′ Q′ loodregt op O X en O Y. Deze loodlijnen vormen met de loodlijnen M Q en N Q een regthoekje Q Q′, waarvan de inhoud, wanneer de aangroeijingen van $x$ en $y$ in differentialen overgaan, gelijk is aan $d\,x\,d\,y$.

Verder brenge men door de lijnen M Q, N Q, M′ Q′ en N′ Q′ vlakken loodregt op het vlak van de $xy$. Deze vlakken bepalen een ligchaampje Q P′, hetwelk, de aangroeijingen van $x$ en $y$ oneindig klein zijnde, de tweede differentiaal voorstelt van het ligchaam, dat een maximum of minimum moet zijn; hieruit volgt, de inhoud dezes ligchaams I noemende,

$$I = \int\int z\,d\,x\,d\,y.$$

De loodregte vlakken M Q P, N Q P, M′ Q′ P′ en N′ Q′ P′ bepalen op het gebogen oppervlak een vierhoekje P P′, hetwelk voor oneindig kleine waarden der aangroeijingen van $x$ en $y$ de tweede differentiaal van het gebogen oppervlak voorstelt. Men mag aannemen, dat dit oneindig kleine vierhoekje gelegen is in het platte vlak, dat het gebogen oppervlak in P aanraakt. Het vierhoekje

P P′

PP' ſtaat alsdan loodregt op de normaal PR, die uit het punt P getrokken het vlak van de $xy$ in R ontmoet; hetzelve is dus gelijk aan het overeenkomſtige vierhoekje QQ' vermenigvuldigd met $\frac{PR}{PQ}$. Nu is $QQ' = dx\,dy$, $PQ = z$ en $PR = z\sqrt{(1+p_1^2+q_1^2)}$; noemt men dus het gebogen oppervlak O, dan is

$$O = \int\int dx\,dy\sqrt{(1+p_1^2+q_1^2)}.$$

Daar O ſtandvastig en I een maximum of minimum moet wezen, zoo hebben wij, volgens § 23,

$$\delta I + n\delta O = 0,$$

dat is, aangezien $dx$ en $dy$ beide als ſtandvastig beſchouwd worden,

$$\int\int dx\,dy\,\delta\left\{z + n\sqrt{(1+p_1^2+q_1^2)}\right\} = 0.$$

Gevolgelijk is

$$V = z + n\sqrt{(1+p_1^2+q_1^2)},$$

$$\text{en } dV = dz + \frac{np_1\,dp_1}{\sqrt{(1+p_1^2+q_1^2)}} + \frac{nq_1\,dq_1}{\sqrt{(1+p_1^2+q_1^2)}}.$$

In de vergelijking (22) is dus $Z = 1$, $P_1 = \frac{np_1}{\sqrt{(1+p_1^2+q_1^2)}}$, $Q_1 = \frac{nq_1}{\sqrt{(1+p_1^2+q_1^2)}}$, $P_2 = 0$, *enz.*; deze vergelijking wordt dienvolgens

$$1 - \frac{1}{dx}\,d\,\frac{np_1}{\sqrt{(1+p_1^2+q_1^2)}} - \frac{1}{dy}\,d\,\frac{nq_1}{\sqrt{(1+p_1^2+q_1^2)}} = 0 \quad (23).$$

Daar verder $p_1\,dx + q_1\,dy$ de volledige differentiaal is van $z = F(x, y)$, zoo hebben wij, nevens de differentiaal-vergelijking (23), ook nog

$$\frac{dp_1}{dy} = \frac{dq_1}{dx}.$$

§ 41. Men ſtelle zich voor een bolvormig oppervlak, waarvan de algemeene vergelijking is

$$z = c \pm \sqrt{[r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2]}.$$

Hieruit vinden wij

$$p_1 = \pm\frac{x-a}{\sqrt{[r^2-(x-a)^2-(y-b)^2]}},$$

$q_1 =$

$$q_1 = \pm \frac{y-b}{\sqrt{[r^2-(x-a)^2-(y-b)^2]}},$$

$$P_1 = \pm \frac{n(x-a)}{r},$$

$$Q_1 = \pm \frac{n(y-b)}{r}.$$

De vergelijking (23) wordt alzoo

$$1 \pm \frac{n}{r} \pm \frac{n}{r} = 0,$$

waaraan voldaan wordt door $n = \mp \frac{r}{2}$ te nemen; *de vergelijking van een bolvormig oppervlak voldoet derhalve aan de voorwaarde, welke door de vergelijking* (23) *wordt uitgedrukt.*

# ZEVENDE AFDEELING.

§ 42. Laat $\varphi = 0$ in het algemeen eene gelijkflachtige differentiaal-vergelijking van de $m^{de}$ orde voorstellen, welke zamengesteld is uit de veranderlijke grootheden $u$, $x$, $y$, $z$, *enz.* en derzelver differentialen.

Wij stellen, dat de hoogste differentiaal van $u$, in deze vergelijking voorkomende, is $d^\mu u$; zijnde $\mu$ gelijk of kleiner dan $m$.

Om de waarde van $\delta u$ te bepalen, merke men op, dat $\varphi$ in het algemeen gelijk nul zijnde, ook $\delta\varphi$ gelijk nul moet wezen.

Vindt men dus door den gewonen algorithmus der differentiaal-rekening

$$\begin{aligned}\delta\varphi = {} & U\,\delta u + U_1\,\delta d\,u + U_2\,\delta d^2\,u + enz. + U_\mu\,\delta d^\mu u \ldots \quad (24),\\ & + X\,\delta x + X_1\,\delta d\,x + X_2\,\delta d^2\,x + enz.,\\ & + Y\,\delta y + Y_1\,\delta d y + Y_2\,\delta d^2\,y + enz.,\\ & + Z\,\delta z + Z_1\,\delta d\,z + Z_2\,\delta d^2\,z + enz.,\\ & + enz.,\end{aligned}$$

dan hebben wij, de differentiaal- en variatieteekens onderling verplaatsende,



U δu

$$\left.\begin{array}{l} U\,\delta u + U_1\,d\,\delta u + U_2\,d^2\,\delta u + \textit{enz.} \ldots + U_\mu\,d^\mu\,\delta u, \\ + X\,\delta x + X_1\,d\,\delta x + X_2\,d^2\,\delta x + \textit{enz.} \\ + Y\,\delta y + Y_1\,d\,\delta y + Y_2\,d^2\,\delta y + \textit{enz.} \\ + \textit{enz.} \end{array}\right\} = 0.$$

Vermenigvuldigt men deze vergelijking met eene onbepaalde veranderlijke grootheid $w$, en integreert men vervolgens iederen term afzonderlijk, dan verkrijgt men

$$\left.\begin{array}{l} \int w\,U\,\delta u + \int w\,U_1\,d\,\delta u + \int w\,U_2\,d^2\,\delta u + \textit{enz.} \\ + \int w\,X\,\delta x + \int w\,X_1\,d\,\delta x + \int w\,X_2\,d^2\,\delta x + \textit{enz.} \\ + \textit{enz.} \end{array}\right\} = \textit{Const.}$$

Herleidt men de integralen, tot dat er geene differentialen der variatiën meer onder de integraalteekens voorkomen, dan vindt men

$$\int w\,U_1\,d\,\delta u = w\,U_1\,\delta u - \int d\,(w\,U_1)\,\delta u,$$

$$\int w\,U_2\,d^2\,\delta u = w\,U_2\,d\,\delta u - d\,(w\,U_2)\,\delta u + \int d^2\,(w\,U_2)\,\delta u,$$

*enz.*

$$\int w\,X_1\,d\,\delta x = w\,X_1\,\delta x - \int d\,(w\,X_1)\,\delta x,$$

*enz.*

Stelt men dus kortheidshalve:

$$P = w\,U - d\,(w\,U_1) + d^2\,(w\,U_2) - \textit{enz.} \ldots \pm d^\mu\,(w\,U_\mu),$$

$$P_1 = w\,U_1 - d\,(w\,U_2) + d^2\,(w\,U_3) - \textit{enz.} \ldots \mp d^{\mu-1}(w\,U_\mu),$$

$$P_2 = w\,U_2 - d\,(w\,U_3) + d^2\,(w\,U_4) - \textit{enz.} \ldots \pm d^{\mu-2}(w\,U_\mu),$$

$$P_3 = \textit{enz.},$$

$$Q = w\,X - d\,(w\,X_1) + d^2\,(w\,X_2) - \textit{enz.},$$

$$Q_1 = w\,X_1 - d\,(w\,X_2) + d^2\,(w\,X_3) - \textit{enz.},$$

$$Q_2 = \textit{enz.},$$

$$R = w\,Y - d\,(w\,Y_1) + d^2\,(w\,Y_2) - \textit{enz.},$$

$$R_1 = \textit{enz.},$$

$$S = w\,Z - d\,(w\,Z_1) + d^2\,(w\,Z_2) - \textit{enz.},$$

$$S_1 = \textit{enz.},$$

dan wordt

$$\begin{array}{l} P_1\,\delta u + P_2\,d\,\delta u + P_3\,d^2\,\delta u + \textit{enz.} + P_\mu\,d^{\mu-1}\,\delta u, \\ + Q_1\,\delta x + Q_2\,d\,\delta x + Q_3\,d^2\,\delta x + \textit{enz.}, \\ + R_1\,\delta y + R_2\,d\,\delta y + R_3\,d^2\,\delta y + \textit{enz.}, \\ + \textit{enz.}, \\ + \int (P\,\delta u + Q\,\delta x + R\,\delta y + S\,\delta z + \textit{enz.}) = \textit{Const.} \end{array}$$

Wanneer men in het eerste lid dezer vergelijking de grootheden buiten het integraalteeken voorstelt door de letter $\varpi$ en de grootheden onder het integraalteeken door de letter $\psi$, dan wordt

$$\varpi + \int \psi = Const.$$

Wij onderstellen, dat de integralen moeten genomen worden tusschen de grenzen $u'$, $x'$, $y'$, *enz.*, en $u''$, $x''$, $y''$, *enz.*

Is nu de waarde van $\int \psi$ zoodanig bepaald, dat dezelve voor $u = u'$, $x = x'$, *enz.*, verdwijnt, en noemt men de waarde van $\varpi$, welke met $u'$, $x'$, $y'$, *enz.*, overeenstemt, $\varpi'$, dan wordt bovenstaande vergelijking

$$\varpi + \int \psi = \varpi'.$$

Neemt men vervolgens voor $\int \psi$ de waarde, welke met $u''$, $x''$, $y''$, *enz.*, overeenstemt, en stelt men de overeenkomstige waarde van $\varpi$ voor door $\varpi''$, dan wordt

$$\varpi'' + \int \psi = \varpi',$$

of

$$\varpi'' = \varpi' - \int \psi.$$

Schrijft men in deze vergelijking voor $\varpi$ en $\psi$ derzelver waarden, dan verkrijgt men

$$\begin{aligned}
& P''_1 \delta u'' + P''_2 d \delta u'' + enz. + P''_\mu d^{\mu-1} \delta u'', \\
& + Q''_1 \delta x'' + Q''_2 d \delta x'' + enz., \\
& + enz., \\
& = P'_1 \delta u' + P'_2 d \delta u' + enz. + P'_\mu d^{\mu-1} \delta u', \\
& + Q'_1 \delta x' + Q'_2 d \delta x' + enz., \\
& + enz., \\
& - \int (P \delta u + Q \delta x + R \delta y + enz.) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25).
\end{aligned}$$

De onbepaalde veranderlijke grootheid $w$ neme men nu zoodanig aan, dat P in het algemeen gelijk nul worde, en men alzoo hebbe

$$w U - d(w U_1) + d^2 (w U_2) - enz. \pm d^\mu (w U_\mu) = 0 \, . \quad (26).$$

Bij het integreren van deze differentiaal-vergelijking verkrijgt men $\mu$ constanten; bepaalt men deze constanten zoodanig, dat men heeft $P''_2 = 0$, $P''_3 = 0$, $P''_4 = 0$, *enz.*, dan wordt de vergelijking (25), na overbrenging der termen,

$$\begin{aligned}
P''_1 \delta u'' = & - Q''_1 \delta x'' - Q''_2 d \delta x'' - enz. - R''_1 \delta y'' - R''_2 d \delta y'' - enz. \\
& + P'_1 \delta u' + P'_2 d \delta u' + enz. + Q'_1 \delta x' + Q'_2 d \delta x' + enz. \\
& + \int (Q \delta x + R \delta y + S \delta z + enz.) \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27).
\end{aligned}$$

Neemt men nu aan, dat $u'$, $d u'$ $d^2 u'$, *enz.*, eene gegevene grootte

grootte hebben, of gegevene functien zijn van $x'$, $y'$, $z'$, *enz.*, $d\,x'$, $d\,y'$, $d\,z'$, *enz.*, dan wordt door de vergelijking (27) de begeerde variatie van $u$ voorgesteld.

§ 43. Daar $\delta\,u'$ gelijk nul moet wezen, wanneer de waarde van $u'$ een maximum of minimum zal zijn, zoo volgt uit de vergelijking (27)

$$Q\,\delta x + R\,\delta y + S\,\delta z + \textit{enz.} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (28),$$

$$\left.\begin{matrix} -Q'_1\,\delta x' - Q'_2\,\delta d\,x' - \textit{enz.} - R'_1\,\delta y' - R'_2\,\delta d\,y' - \textit{enz.} \\ + P'_1\,\delta u' + P'_2\,\delta d\,u' + \textit{enz.} - Q'_1\,\delta x' + Q'_2\,\delta d\,x' + \textit{enz.} \end{matrix}\right\} = 0 \; (29).$$

Wanneer $\delta x$, $\delta y$, *enz.* onderling onafhankelijk zijn, dan volgen uit de vergelijking (28) wederom de afzonderlijke vergelijkingen

$$Q = 0,\; R = 0,\; S = 0,\; \textit{enz.}$$

Bestaat er echter tusschen $x$, $y$, $z$, *enz.* eene zekere betrekking, zoodat men, bijvoorbeeld, in het algemeen heeft $d\,z = m\,dx + n\,dy + \textit{enz.}$ dan is ook $\delta z = m\,\delta x + n\,\delta y + \textit{enz.}$

Substitueert men deze waarde in de vergelijking (28), dan wordt dezelve

$$(Q + m\,S)\,\delta x + (R + n\,S)\,\delta y + \textit{enz.} = 0,$$

en door nu vervolgens de coëfficiënten gelijk nul te stellen, verkrijgt men

$$Q + m\,S = 0,\; R + n\,S = 0,\; \textit{enz.}$$

§ 44. Aanmerking. Wanneer in $\phi$ de grootheden $x'$, $y'$, $z'$, *enz.*, $x''$, $y''$, $z''$, *enz.*, voorkomen, welke bij het differentiëren als standvastig worden beschouwd, dan behoort men bij de in vergelijking (24) opgegevene waarde van $\delta\phi$ nog termen te voegen van den vorm

$$\alpha'\,\delta x' + \alpha'_1\,\delta d\,x' + \textit{enz.} + \beta'\,\delta y' + \beta'_1\,\delta d\,y' + \textit{enz.}$$
$$\alpha''\,\delta x'' + \alpha''_1\,\delta d\,x'' + \textit{enz.} + \beta''\,\delta y'' + \beta''_1\,\delta d\,y'' + \textit{enz.}$$

en bij de vergelijking (29) behooren dienvolgens alsdan nog gevoegd te worden de termen

$$\delta x' \int w\,\alpha' + \delta d\,x' \int w\,\alpha'_1 + \textit{enz.} + \delta y' \int w\,\beta' + \textit{enz.},$$
$$\delta x'' \int w\,\alpha'' + \textit{enz.}$$

§ 45. Tot eene toepassing op een bijzonder voorbeeld, zullen wij nemen de vergelijking

$$u = \int \frac{\sqrt{(d\,x^2 + d\,y^2)}}{\sqrt{(x - x')}},$$

welke reeds in § 35 behandeld is.

Uit

Uit deze vergelijking volgt

$$du = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{\sqrt{(x - x')}},$$

en $$du\sqrt{(x - x')} - \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 0.$$

In de vergelijking (24) is alzoo:

$$U = 0, \; U_1 = \sqrt{(x - x')}, \; U_2 = 0, \; enz.,$$

$$X = \frac{du}{2\sqrt{(x - x')}}, \; X_1 = \frac{-dx}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}, \; X_2 = 0, enz.,$$

$$Y = 0 \qquad, \; Y_1 = \frac{-dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}, \; Y_2 = 0, enz.;$$

gevolgelijk wordt de vergelijking (26).,

$$d.\, w\sqrt{(x - x')} = 0,$$

derhalve $$w\sqrt{(x - x')} = Conft. = c$$

en $$w = \frac{c}{\sqrt{(x - x')}}.$$

Hieruit volgt verder:

$$P_1 = c,$$

$$Q = \frac{c\,du}{2(x - x')} + c\,d.\,\frac{dx}{\sqrt{(x - x')(dx^2 + dy^2)}},$$

$$Q_1 = \frac{-c\,dx}{\sqrt{(x - x')(dx^2 + dy^2)}},$$

$$R = c\,d.\,\frac{dy}{\sqrt{(x - x')(dx^2 + dy^2)}},$$

$$R_1 = \frac{-c\,dy}{\sqrt{(x - x')(dx^2 + dy^2)}}.$$

Daar tot het maximum of minimum van $u$ gevorderd wordt, dat de differentiaal-vergelijkingen $Q = 0$ en $R = 0$ gelijktijdig beftaan, zoo moet blijkbaar, bij eene behoorlijke keuze der conftanten, uit elk derzelve dezelfde vergelijking tusfchen $x$ en $y$ kunnen afgeleid worden.

Uit $R = 0$ vindt men ligtelijk achtereenvolgend

$$\frac{dy}{\sqrt{(x - x')(dx^2 + dy^2)}} = Conft. = \frac{1}{\sqrt{2a}},$$

$$dy = dx\sqrt{\frac{x - x'}{2a - (x - x')}}$$

en $y = -\sqrt{[2a(x - x') - (x - x')^2]} + a\,B.\,Sin.\,Verf.\,\frac{x - x'}{a} + Conft.$

Man kan zich nu gemakkelijk overtuigen, dat deze vergelijking ook aan de differentiaal-vergelijking $Q = o$ beantwoordt; want uit

$$dy = dx \sqrt{\frac{x - x'}{2a - (x - x')}},$$

vindt men

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx \sqrt{\frac{2a}{2a - (x - x')}},$$

en bijgevolg $$du = dx \sqrt{\frac{2a}{2a(x - x') - (x - x')^2}};$$

ſtelt men nu deze waarden in de boven opgegevene uitdrukking voor $Q$, dan wordt

$$Q = \frac{c\, dx \sqrt{2a}}{2\sqrt{(x - x')^3 (2a - (x - x'))}} + c\, d.\sqrt{\frac{2a - (x - x')}{2a(x - x')}} = o.$$

Daar $x'$ reeds in de gegevene differentiaal-vergelijking voorkomt, zoo moet, overeenkomſtig de aanmerking in § 44, bij $\delta \varphi$ nog gevoegd worden eenen term $\omega \delta x'$, weshalve de coëfficiënt van $\delta x'$ in de vergelijking (29) wordt $(Q'_1 - \int w \omega)$.

Nu is $$\omega = \frac{-du}{2\sqrt{(x - x')}} \text{ en } w = \frac{c}{\sqrt{(x - x')}},$$

dus $$\int w \omega = -c \int \frac{du}{2(x - x')};$$

verder volgt uit $Q = o$,

$$c \int \frac{du}{2(x - x')} = \frac{-c\, dx}{\sqrt{(x - x')(dx^2 + dy^2)}} = Q_1$$

derhalve is $$\int w \omega = -Q_1 + Conſt.$$

Neemt men alzoo de integraal tusſchen de bepaalde grenzen, dan wordt

$$\int w \omega = Q'_1 - Q''_1$$

en $$Q'_1 - \int w \omega = Q''_1;$$

gevolgelijk wordt de vergelijking (29), aannemende, even als in § 35, dat bij den aanvang der integraal $u = o$ en dus ook $\delta u' = o$ is,

$$-Q''_1 \delta x'' - R''_1 \delta y'' + Q'_1 \delta x' + R'_1 \delta y' = o.$$

Uit deze vergelijking volgen weder, aangezien $\delta x''$ en $\delta y''$ onafhankelijk zijn van $\delta x'$ en $\delta y'$, de twee afzonderlijke vergelijkingen

$$Q''_1 \delta x'' + R''_1 \delta y'' = o,$$

en $$Q'_1 \delta x' + R'_1 \delta y' = o;$$

der-

derhalve $$\frac{\delta y''}{\delta x''} = -\frac{Q''_1}{R''_1},$$

en $$\frac{\delta y'}{\delta x'} = -\frac{Q'_1}{R'_1}.$$

Verder hebben wij, uit de boven opgegevene vergelijking

$$\frac{dy}{\sqrt{(x-x')(dx^2+dy^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2a}},$$

$$R_1 = -\frac{c}{\sqrt{2a}} \text{ en } Q_1 = -\frac{c}{\sqrt{2a}} \times \frac{dx}{dy},$$

derhalve $$R'_1 = R''_1 = -\frac{c}{\sqrt{2a}} \text{ en } Q''_1 = -\frac{c}{\sqrt{2a}} \times \frac{dx''}{dy''}.$$

Hieruit volgt

$$\frac{\delta y'}{\delta x'} = \frac{\delta y''}{\delta x''} = -\frac{dx''}{dy''},$$

geheel overeenkomstig hetgeen in § 35 is gevonden.

---

Uit deze
Cosec. ψ
volgens (5) i
$\sqrt{p}$ z
en in het algem
$\sqrt{p}$ z =
het ligchaam, t
'ken schok met eene

IETS

B 2

# IETS

OVER DE

# BEWEGING VAN EEN LIGCHAAM,

HETWELK, NA EENEN AANVANKELIJKEN SCHOK, DOOR EENE MIDDELPUNTSKRACHT WORDT VOORTGEDREVEN, WELKE WERKT IN DE OMGEKEERDE REDEN VAN DE DERDE MAGTEN DER AFSTANDEN. (1)

DOOR

***H. VAN BLANKEN,***

*Stads-Lector in de Wis- en Natuurkundige Wetenschappen te Zwolle.*

Wanneer een ligchaam, na eenen aanvankelijken ſchok, door eene middelpuntskracht wordt voortgedreven, dan is (zie I. R. SCHMIDT, *Dynamica*, bladz. 273) in het algemeen de polaire vergelijking van de loopbaan

$$\varphi = \int \frac{\partial z}{z \sqrt{\left\{ z^2 (B - 4p^2 \int G \partial z) - 1 \right\}}}; \quad \ldots (1)$$

zijnde in deze vergelijking $G$ de verſnelling der middelpuntskracht; $B$ eene ſtandvastige, welke bij de eerſte integratie wordt verkregen, en

(1) Beſtuurderen van het Genootſchap hebben, in overeenſtemming met de Wetenſchappelijke Commisſie, geoordeeld, dat dit ſtukje geene ongeſchikte bijdrage voor de Verhandelingen des Genootſchaps zou uitmaken; hoezeer dan ook de uitkomſten, door den Schrijver verkregen, niet als geheel nieuw kunnen beſchouwd worden. Men zie, onder anderen, de door het Medelid R. LOBATTO in 1823 uitgegevene *Wiskundige Mengelingen*, bladz. 161; alwaar hetzelfde problema, hoezeer minder uitvoerig, behandeld is.

en $p$ eene ſtandvastige, welke gelijk is aan de eenheid gedeeld door tweemaal de ruimte, die door den voerſtraal in eene tijdseenheid wordt doorloopen.

Voorts is in het algemeen, de ſnelheid van het bewegende ligchaam $V$ noemende,

$$V = \sqrt{\left\{\frac{B}{p^2} - 4\int G\,\delta z\right\}} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Neemt men nu aan, dat de middelpuntskracht in de omgekeerde reden van de derde magten der afſtanden werkt, dan kan men ſtellen

$$G = \frac{m}{z^3}\ ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

hieruit volgt dan $\int G\,\delta z = -\frac{m}{2z^2}$,

zoodat de vergelijkingen (1) en (2) in dit bijzondere geval worden

$$\varphi = \int \frac{\delta z}{z\sqrt{\left\{Bz^2 - (1 - 2mp^2)\right\}}} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

en

$$V = \sqrt{\left\{\frac{B}{p^2} + \frac{2m}{z^2}\right\}}. \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Uit (4) volgt: $\frac{z\,\delta\varphi}{\delta z} = \frac{1}{\sqrt{\left\{Bz^2 - (1 - 2mp^2)\right\}}}$;

ſtelt men dus den hoek, dien de voerſtraal in eenig punt der loopbaan met de raaklijn maakt, door $\psi$ voor, dan is in het algemeen, volgens eenen bekenden regel,

$$Tang.\,\psi = \frac{1}{\sqrt{\left\{Bz^2 - (1 - 2mp^2)\right\}}} \ldots\ldots\ldots (6)$$

Uit deze laatſte vergelijking volgt gemakkelijk

$$Coſec.\,\psi = \sqrt{(1 + Cot.^2\,\psi)} = \sqrt{(Bz^2 + 2mp^2)},$$

maar volgens (5) is ook

$$Vpz = \sqrt{(Bz^2 + 2mp^2)},$$

weshalve men in het algemeen ook nog heeft

$$Vpz = Coſec.\,\psi \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7).$$

Wanneer nu het ligchaam, uit eenig punt A (Fig. 21), door eenen aanvankelijken ſchok met eene ſnelheid $V'$ is voortgeworpen, in

in eene rigting A B, welke met den voerstraal O A eenen hoek $\psi'$ maakt, dan kunnen, de versnelling $G'$ der middelpuntskracht op den afstand O A $= z'$ bekend zijnde, de standvastigen, die in de voorgaande vergelijkingen voorkomen, gemakkelijk bepaald worden. Men heeft namelijk volgens (3)

$$m = z'^2 G',$$

en volgens (7) $$p = \frac{1}{V' z' \, Sin. \psi'};$$

de standvastige $m$ is alzoo onafhankelijk van de hoegrootheid en van de rigting van den aanvankelijken schok, terwijl de standvastige $p$ onafhankelijk van de hoegrootheid der middelpuntskracht is. Kent men nu $m$ en $p$, dan vindt men vervolgens uit (5)

$$B = p^2 \left\{ V'^2 - \frac{2\,m}{z'^2} \right\}.$$

Bij het integreren der vergelijking (4), komen hoofdzakelijk twee gevallen in aanmerking. De waarde van $1 - 2\,m p^2$ kan namelijk positief of negatief zijn. In het eerste geval wordt de integraal uitgedrukt door cirkelbogen, en in het tweede geval door logarithmen. Ten einde echter des te beter de verschillende vormen, welke de loopbaan verkrijgen kan, te kunnen opmerken, zullen wij een grooter aantal bijzondere gevallen onderscheiden. Vooraf merken wij op, dat $B$ niet negatief en zelfs niet nul kan zijn, indien $1 - 2\,m p^2$ positief is; want $B$ negatief of nul, en $1 - 2\,m p^2$ positief zijnde, zou de in (4) voorkomende wortelgrootheid $\sqrt{\left\{ B z^2 - (1 - 2\,m p^2) \right\}}$, voor alle mogelijke waarden van $z$, onbestaanbaar zijn. Desgelijks kan $B$ niet negatief wezen, indien $1 - 2\,m p^2 = 0$ mogt zijn.

---

## I^ste^ GEVAL.

$1 - 2\,m p^2$ *positief*, en dus ook $B$ *positief*.

Stelt men $1 - m p^2 = n^2$, $B = \frac{1}{k^2}$ en $n k = a$, dan vindt men uit (4) voor de polaire vergelijking der loopbaan

$$z = a \, Sec. \, n (\varphi + \alpha). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Voor

Voor de ſnelheid in eenig punt van de baan, heeft men alsnu volgens (5)

$$V = \sqrt{2m\left\{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{k^2(1-n^2)}\right\}}; \quad \ldots\ldots (9)$$

en voor de tangens van den hoek, dien de voerſtraal in eenig punt van de baan met de raaklijn maakt, volgens (6),

$$Tang.\,\psi = \frac{k}{\sqrt{(z^2-a^2)}} = \frac{1}{n\,Tang.\,n(\varphi+\alpha)}. \quad . \,(10)$$

Uit de laatſte formule blijkt, dat $a$ de lengte is van den voerſtraal, welke getrokken wordt naar het punt, alwaar dezelve loodregt op de raaklijn ſtaat; deze voerſtraal is tevens de kortſte, welke naar eenig punt van de loopbaan kan getrokken worden, want voor $z < a$ worden, volgens (8) en (10), $\varphi$ en $\psi$ onbeſtaanbaar.

De formule (9) geeft:

$$\text{voor } z = a\,,\quad V = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2m}{1-n^2}}$$

$$\text{en} \qquad \text{voor } z = \infty\,,\quad V = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{2m}{1-n^2}} = \frac{n}{a}\sqrt{\frac{2m}{1-n^2}};$$

*op eenen oneindig grooten afſtand is dus de ſnelheid gelijk aan n maal de ſnelheid op den kleinſten afſtand van den oorſprong.*

Wanneer het bewegende ligchaam den oorſprong nadert, dan neemt, $n < 1$ zijnde, de ſnelheid gedurig toe, en de hoek, dien de rigting der beweging met den voerſtraal maakt, wordt ſteeds grooter, tot dat deze rigting loodregt op den voerſtraal ſtaat; doch dan is de ſnelheid ook zoo zeer toegenomen, dat het ligchaam zich wederom van den oorſprong moet verwijderen in eene baan, die gelijk en gelijkvormig met de afgeloopene baan is.

Op eenen oneindig grooten afstand beweegt het ligchaam met eene eenparige ſnelheid in de rigting van den voerſtraal, dat is, volgens de aſymptote; zijnde $k$ de lengte der loodlijn, welke uit den oorſprong op de aſymptote wordt getrokken.

De ſtandvastige $\alpha$, die in de vergelijking (8) voorkomt, wordt bepaald door de keuze van den oorſprong der hoeken. Wil men, bij voorbeeld, den vroeger bedoelden voerſtraal O A $= z'$ (Fig. 21) tot oorſprong der hoeken aannemen, dan is

$\alpha =$

$$u = \frac{1}{n} \text{ Boog Sec. } \frac{z'}{a}.$$

Begeert men echter den voerſtraal, die de rigting der beweging regthoekig doorſnijdt, tot oorſprong der hoeken aan te nemen, dan is $u = 0$, en de vergelijking van de loopbaan wordt alsdan.

$$z = a \text{ Sec. } n\varphi. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Om een behoorlijk denkbeeld te geven van de verſchillende vormen, welke de loopbanen in dit geval voor onderſcheidene waarden van het getal $n$ verkrijgen, zullen wij in de volgende voorbeelden eenige bijzondere waarden van $n$ onderſtellen.

*Eerſte Voorbeeld.* ($n > 1$). Wanneer $n > 1$ is, dan moet $m$ negatief zijn, en de middelpuntskracht alzoo afſtootend werken. De kromme lijn B A C (Fig. 12), welke nu door de vergelijking (11) wordt voorgeſteld, heeft hare bolle zijde naar het middelpunt der krachten gekeerd (1), en heeft twee oneindig voortloopende takken. Deze takken hebben aſymptoten P D en P E, welke ieder in het bijzonder met den voerſtraal O A, die de loopbaan in A regthoekig doorſnijdt, eenen hoek vormen gelijk aan het $n^{de}$ deel van eenen regten hoek. De genoemde aſymptoten zijn voorts op den afſtand $k = \frac{1}{n} a$ verwijderd van de voerſtralen O D′ en O E′, welke tot de oneindig ver afgelegen punten der loopbaan behooren.

Stelt men $m = -m'$, dan wordt de algemeene uitdrukking voor de ſnelheid

hieruit

(1) De bijzonderheid, dat de bolle zijde der loopbaan naar het middelpunt der krachten gekeerd is, is geheel eigenaardig bij afſtootende middelpuntskrachten, onverſchillig volgens welke wet deze ook mogen werken.

Wanneer dus, b. v., de afſtootende middelpuntskracht vermindert in de omgekeerde reden van de tweede magten der afſtanden, dan doorloopt het ligchaam eene hyperbool, en wel dien tak van dezelve, wiens bolle zijde naar het brandpunt is gekeerd, waarin de afſtootende kracht werkzaam is.

Het ligchaam doorloopt almede eene hyperbool, wanneer de afſtootende kracht vermeerdert in de regte reden van de afſtanden; doch de afſtootende kracht is alsdan werkzaam in het middelpunt van deze hyperbool.

$$V = \sqrt{2m'\left\{\frac{1}{k^2(n^2-1)} - \frac{1}{z^2}\right\}};$$

hieruit ziet men, dat het ligchaam van B naar A voortgaande steeds langzamer beweegt, en in A zijne kleinste snelheid heeft verkregen.

*Tweede Voorbeeld.* ($n=1$). Voor $n=1$, wordt de vergelijking (11)

$$z = a\,Sec.\,\varphi \quad \text{of} \quad z = k\,Sec.\,\varphi.$$

Het ligchaam doorloopt nu eene regte lijn AB (Fig. 13), welke op den afstand $OA = k$ van den oorsprong is getrokken.

Uit de onderstelling $n = 1$, volgt, dat of $p = 0$ of $m = 0$ moet zijn. Is $p = 0$ en $k$ eindig, dan is volgens (9) $V = \infty$; wordt dus een ligchaam met eene oneindig groote snelheid in de rigting AB voortgeworpen, dan zal hetzelve de regte lijn AB doorloopen, niettegenstaande er in O eene eindige middelpuntskracht op werkt. Is $p = 0$ en $k = \infty$, dan beweegt het ligchaam in eene regte lijn, welke op eenen oneindig grooten afstand van het middelpunt van aantrekking is getrokken. Is $m = 0$, dan is ook de middelpuntskracht nul, en het is klaar, dat alsdan het ligchaam, met zijne aanvankelijke snelheid, in eene regte lijn moet voortbewegen.

*Derde Voorbeeld.* ($n = \frac{1}{2}$). Voor $n = \frac{1}{2}$ wordt de vergelijking (11)

$$z = a\,Sec.\,\tfrac{1}{2}\varphi \quad \text{of} \quad z = \tfrac{1}{2}k\,Sec.\,\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Het ligchaam doorloopt nu eene kromme lijn ABC, welke in Fig. 14 is voorgesteld. De loodlijnen OD en OE, welke uit den oorsprong op de asymptoten der oneindige takken zijn getrokken, zijn elk gelijk aan tweemaal den kleinsten voerstraal OB.

*Vierde Voorbeeld.* ($n=\frac{1}{3}$). Voor $n=\frac{1}{3}$ wordt de vergelijking (11)

$$z = a\,Sec.\,\tfrac{1}{3}\varphi \quad \text{of} \quad z = \tfrac{1}{3}k\,Sec.\,\tfrac{1}{3}\varphi.$$

Het ligchaam doorloopt nu eene kromme lijn ABCD, welke in Fig. 15 is voorgesteld. De loodlijn OE, welke uit den oorsprong op de gemeenschappelijke asymptote der oneindig voortloopende takken BA en BD is getrokken, is gelijk aan driemaal den kleinsten voerstraal OC.

*Vijfde Voorbeeld.* ($n=\frac{1}{4}$). Voor $n=\frac{1}{4}$ wordt de vergelijking (11)

$$z = a\,Sec.\,\tfrac{1}{4}\varphi \quad \text{of} \quad z = \tfrac{1}{4}k\,Sec.\,\tfrac{1}{4}\varphi.$$

Het

Het ligchaam doorloopt nu eene kromme lijn A B C D, welke in Fig. 16 is afgebeeld. De loodlijnen O E en O F, uit den oorfprong op de afymptoten der oneindige takken B A en B D nedergelaten, zijn elk gelijk aan viermaal den kleinften voerftraal O C.

Het is verder ligtelijk in te zien, dat, voor zeer kleine waarden van $n$, het bewegende ligchaam verfcheidene fpiraalvormige omgangen om het middelpunt van aantrekking moet doorloopen, voordat de rigting der beweging loodregt op den voerftraal komt te ftaan. Voor eene oneindig kleine waarde van $n$ wordt dit aantal omgangen oneindig groot.

---

## II^de GEVAL.

*$1 - 2mp^2$ negatief,* en *B pofitief.*

Stelt men $1 - 2mp^2 = -n^2$, $B = \frac{1}{k^2}$ en $nk = a$, dan vindt men uit (4) voor de polaire vergelijking der loopbaan

$$\varphi + \alpha = \frac{1}{2n} \text{ Nep. Log. } \frac{\sqrt{(z^2 + a^2)} - a}{\sqrt{(z^2 + a^2)} + a}, \quad \ldots (12)$$

of hieruit $z$ oplosfende

$$z = \frac{2a}{e^{n(\varphi+\alpha)} - e^{-n(\varphi+\alpha)}} \quad \ldots\ldots (13)$$

Voor de fnelheid in eenig punt van de baan, heeft men nu volgens (5)

$$V = \sqrt{2m} \left\{ \frac{1}{z^2} + \frac{1}{k^2(1+n^2)} \right\}; \quad \ldots\ldots (14)$$

en voor de tangens van den hoek, dien de voerftraal in eenig punt van de baan met de raaklijn maakt, volgens (6)

$$\text{Tang. } \psi = \frac{k}{\sqrt{(z^2 + a^2)}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{2n(\varphi+\alpha)} - 1}{e^{2n(\varphi+\alpha)} + 1} \quad . (15).$$

Uit de laatfte formule volgt, dat de rigting der beweging nooit loodregt op den voerftraal kan ftaan.

Wanneer

Wanneer het ligchaam den oorſprong nadert, beſchrijft het een oneindig aantal ſpiraalvormige omgangen om het middelpunt van aantrekking; want om $z = 0$ te maken, zal men volgens (13) $\varphi = \infty$ moeten nemen.

Verwijdert het ligchaam zich van den oorſprong, dan wordt, blijkens (15), de hoek tusſchen de rigting der beweging en den voerſtraal ſteeds kleiner. Op eenen oneindig grooten afſtand geſchiedt de beweging, met eene eenparige ſnelheid $V = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2m}{1+n^2}}$, in de rigting van den voerſtraal, dat is, volgens de aſymptote; zijnde $k$ de lengte der loodlijn, welke uit den oorſprong op de aſymptote wordt getrokken.

De ſtandvastige $\alpha$, die in de vergelijking (12) voorkomt, wordt door de keuze van den oorſprong der hoeken bepaald. Doet men die keuze zoodanig, dat $\alpha = 0$ is, dan is de vergelijking der loopbaan

$$z = \frac{2a}{e^{n\varphi} - e^{-n\varphi}}, \ldots\ldots\ldots (16)$$

of na ontwikkeling

$$z = \frac{a}{n\varphi + \frac{n^3\varphi^3}{1.2.3} + \frac{n^5\varphi^5}{1.2.3.4.5} + \text{enz.}}; \ldots (17)$$

alsnu loopt de aſymptote evenwijdig met den oorſprong der hoeken, omdat voor $\varphi = 0$, $z = \infty$ wordt.

---

## III^de GEVAL.

### $1 - 2mp^2$ *negatief* en $B$ *negatief*.

Stelt men $1 - 2mp^2 = -n^2$, $B = -\frac{1}{k^2}$ en $nk = a$, dan vindt men uit (4) voor de polaire vergelijking der loopbaan

$$\varphi + \alpha = \frac{1}{2n} \text{ Nep. Log. } \frac{a - \sqrt{(a^2 - z^2)}}{a + \sqrt{(a^2 - z^2)}}, \ldots (18)$$

of

of $z$ hieruit oplossende

$$z = \frac{2a}{e^{n(\varphi+\alpha)} + e^{-n(\varphi+\alpha)}}; \ldots\ldots (19)$$

terwijl men alsnu volgens (5) en (6) heeft

$$V = V 2m \left\{ \frac{1}{z^2} - \frac{1}{k^2(1+n^2)} \right\} \ldots\ldots (20)$$

en $$Tang.\psi = \frac{k}{V(a^2 - z^2)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{2n(\varphi+\alpha)}+1}{e^{2n(\varphi+\alpha)}-1}. \quad (21)$$

Uit de laatste formule blijkt, dat $a$ de lengte van den voerstraal is, welke getrokken wordt naar het punt, alwaar dezelve loodregt op de raaklijn staat; en dat deze voerstraal tevens de langste is, welke naar eenig punt van de loopbaan kan getrokken worden. De loopbaan heeft dus in dit geval geene oneindig voortloopende takken of asymptoten, maar maakt weder een oneindig aantal spiraalvormige omgangen om den oorsprong, omdat, volgens (19), $\varphi = \infty$ moet genomen worden, indien men begeert dat $z = 0$ wordt.

Wanneer in deze loopbaan, die in Fig. 17 is afgebeeld, het ligchaam zich van den oorsprong verwijdert, wordt, blijkens (21), de hoek, dien de rigting der beweging met den voerstraal maakt, steeds grooter, tot dat in het punt B, op den afstand O B $= a$ van den oorsprong gelegen, de rigting der beweging loodregt op den voerstraal O B staat. In dit punt heeft de snelheid, blijkens (20), hare kleinste waarde $V = \frac{1}{a} V \frac{2m}{n^2+1}$ verkregen; deze snelheid is dan te gering, om het ligchaam op dien afstand van het middelpunt der aantrekkende kracht verwijderd te houden, en het ligchaam begint daarom den oorsprong weder te naderen; doorloopende eene baan, die gelijk en gelijkvormig aan de dan reeds afgelegde is.

Neemt men den langsten voerstraal O B als oorsprong der hoeken aan, dan is $\alpha = 0$, en dus wordt dan de vergelijking der baan

$$z = \frac{2a}{e^{n\varphi} + e^{-n\varphi}}, \ldots\ldots\ldots (22)$$

of na ontwikkeling

$$z = \frac{a}{1 - \frac{n^2\varphi^2}{1.2} + \frac{n^4\varphi^4}{1.2.3.4} + enz.} \ldots (23)$$

IV^de

## IV^de GEVAL.

$1 - 2mp^2$ *negatief*, en $B = 0$.

Stelt men $1 - 2mp^2 = -n^2$ en $B = 0$, dan vindt men uit (4) voor de polaire vergelijking der loopbaan

$$\varphi + \alpha = \frac{1}{n} \, Nep. \, Log. \, z,$$

of

$$z = e^{n(\varphi + \alpha)} \; ; \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

terwijl men volgens (5) en (6) heeft

$$V = \frac{1}{z} \sqrt{2m}, \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

en

$$Tang. \psi = \frac{1}{n} \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

Het ligchaam beweegt zich dus nu in de bekende logarithmifche fpiraal A B C (Fig. 18). *Deszelfs fnelheid is omgekeerd evenredig aan den voerftraal, zoodat zij dan ook op eenen oneindig grooten afftand van den oorfprong nul is.* Indien P D de raaklijn en O P de voerftraal van eenig punt P der baan zijn, is, volgens (26), *Cot.* O P D $= n$; in elk punt van de baan maakt dus de rigting der beweging met den voerftraal, eenen even grooten hoek.

Dewijl $m = z^2 G$ is, heeft men volgens (25) ook nog $V = \sqrt{2zG}$. Indien dus in eenig punt A (Fig. 21), op eenen afftand O A $= z'$ van het middelpunt O der aantrekkende kracht, de verfnelling $G'$ dier kracht bekend is, en men dan het ligchaam eene logarithmifche fpiraal wil doen doorloopen, zal men hetzelve uit A moeten voortwerpen met eene fnelheid $V'$, welke middenevenredig tusfchen $2z'$ en $G'$ is. Denzelfden hoek, dien de rigting der beweging aanvankelijk in het punt A met den voerftraal O A maakt, zal zij dan ook in elk volgend punt met den voerftraal blijven maken.

De waarde van $\alpha$ wordt weder geheel bepaald door de keuze van den oorfprong der hoeken. Neemt men de zoo evengenoemde O A $= z'$ (Fig. 21) tot oorfprong der hoeken aan, dan is $\alpha = \frac{1}{n} \, Nep. \, Log. \, z'$, waardoor de vergelijking der loopbaan wordt $\varphi = \frac{1}{n} \, Nep. \, Log. \, \frac{z}{z'}$ of $z = z' e^{n\varphi}$. Kiest men echter den oor-

oorsprong der hoeken zoodanig, dat $\alpha = 0$ is, dan wordt de vergelijking der loopbaan $z = e^{n\varphi}$, of zoo men $e^n = b$ stelt

$$z = b^{\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Aanmerking. Het is klaar, dat men, in de vergelijkingen (13) en (19) $B = 0$ of $k = \infty$ nemende, door eene geschikte herleiding tot de vergelijking (24) moet kunnen geraken, mits daarbij slechts eene overeenstemmende bepaling der verschillende door $\alpha$ voorgestelde standvastigen plaats hebbe. Neemt men, b. v. in (19), $\alpha = -\frac{1}{n}$ *Nep. Log.* $2k$ of $e^{-n\alpha} = 2k$, tevens $a = nk$ substitueerende, dan verandert die vergelijking in

$$z = \frac{2nk}{\frac{e^{n\varphi}}{2k} + 2k.e^{-n\varphi}} = \frac{n}{\frac{e^{n\varphi}}{4k^2} + e^{-n\varphi}} = \frac{n}{\frac{1}{4}Be^{n\varphi} + e^{-n\varphi}};$$

en stelt men hierin $B = 0$, dan komt er

$$z = ne^{n\varphi},$$

welke vergelijking men ook verkrijgt, door in (24) $\alpha = \frac{1}{n}$ *Nep.Log.* $n$ te nemen.

Op nagenoeg dezelfde wijze kan (24) uit (13) afgeleid worden.

---

## V^de GEVAL.

$$1 - 2mp^2 = 0 \text{ , en } B = 0.$$

Dit geval is slechts een bijzonder geval van het voorgaande, en kan daaruit afgeleid worden door $n = 0$ te nemen. Alsnu wordt volgens (26) *Tang.* $\psi = \infty$ en $\psi = 90^\circ$, zoodat nu de standvastige hoek, dien de rigting der beweging met den voerstraal maakt, een regte hoek is, en bijgevolg de loopbaan een cirkel moet wezen.

Stelt men dan ook in de vergelijking (24) $\alpha = \frac{1}{n}$ *Nep. Log.* $r$ of $e^{n\alpha} = r$, waardoor zij den vorm $z = re^{n\varphi}$ verkrijgt, zoo gaat die vergelijking voor $n = 0$ in $z = r$ over.

Voor de snelheid, waarmede de beweging in dien cirkel geschied, heeft men volgens (25)

$V =$

$$V = \frac{1}{r} \sqrt{2m}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

en, den omloopstijd door $T$ voorstellende, is

$$T = \frac{2r\pi}{V} = \frac{2r^2\pi}{\sqrt{2m}} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

*Wanneer dus, bij de ondersteld wet van aantrekking, twee ligchamen zich, op verschillende afstanden van het middelpunt van aantrekking, in cirkelvormige banen bewegen, zijn de snelheden omgekeerd evenredig aan die afstanden; en staan de omloopstijden tot elkander als de vierkanten dier afstanden.*

---

## VI^de GEVAL.

$1 - 2mp^2 = 0$, en $B$ *positief.*

Stelt men in (4), $1 - 2mp^2 = 0$ en $B = \frac{1}{k^2}$, dan vindt men door integratie

$$z(\varphi + \alpha) = k; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

terwijl men volgens (5) en (6) heeft

$$V = \sqrt{2m\left\{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{z^2}\right\}}, \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

en

$$Tang.\, \psi = \frac{k}{z}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Uit de vergelijking (30) volgt, dat het ligchaam nu beweegt in de bekende hyperbolische spiraal A B C (Fig. 19).

Indien O P de voerstraal en P E de raaklijn van een willekeurig punt P dezer kromme lijn is, en dan uit den oorsprong O, op dien voerstraal eene loodlijn O E gesteld wordt, de raaklijn in E ontmoetende, is O E = O P × *Tang.* O P E = $z$ *Tang.* $\psi$, en dus blijkens (32) O E = $k$. Trekt men verder uit den oorsprong eene loodlijn O F op de raaklijn, en stelt men O F = $l$, dan is volgens eene bekende eigenschap van den regthoekigen driehoek O P E, $\frac{1}{l^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{z^2}$. Hierdoor wordt volgens (31)

$$V = \frac{1}{l} \sqrt{2m}.$$

De

*De snelheid in elk punt* P *is dus gelijk aan de snelheid in den cirkel, die tot straal heeft de loodlijn, welke uit den oorsprong op de raaklijn van het punt* P *wordt getrokken.*

Wanneer het bewegende ligchaam zich van het middelpunt van aantrekking verwijdert, maakt in elk volgend punt de rigting der beweging met den voerstraal eenen kleineren hoek, terwijl ook de snelheid afneemt. Op eenen oneindig grooten afstand beweegt het ligchaam, met de eenparige snelheid $V = \frac{1}{k} \sqrt{2m}$, in de rigting van den voerstraal, dat is, volgens de asymptote; zijnde $k$ de lengte der loodlijn, welke uit den oorsprong op de asymptote wordt getrokken.

Kiest men den oorsprong der hoeken zoodanig, dat $\alpha = 0$ is, dan is de vergelijking der loopbaan

$$z\varphi = k, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

als wanneer de asymptote evenwijdig met den oorsprong der hoeken is.

Aanmerking. Het is klaar, dat men uit de polaire vergelijkingen, welke in het eerste en tweede geval gevonden zijn, door daarin $n = 0$ te nemen, tot de polaire vergelijking van het nu beschouwde zesde geval moet kunnen geraken; mits daarbij eene overeenstemmende bepaling der standvastigen $\alpha$ plaats hebbe. En dat men desgelijks uit de vergelijking (30), door $B = 0$ of $k = \infty$ te nemen, tot de vergelijking van den in het vijfde geval gevonden' cirkel moet kunnen komen.

Stelt men alzoo in de vergelijking (8) $n\alpha = -\frac{1}{2}\pi$, en substitueert men tevens $a = nk$, dan wordt die vergelijking

$$z = \frac{nk}{Sin.\, n\varphi};$$

en neemt men nu $n = 0$, waardoor $Sin.\, n\varphi = n\varphi$ wordt, dan komt er

$$z = \frac{k}{\varphi} \quad \text{of} \quad z\varphi = k.$$

Substitueert men in de vergelijking (17) $a = nk$, deelt men vervolgens teller en noemer van haar tweede lid door $n$, en stelt men daarna $n = 0$, zoo komt er almede

$z =$

$$z = \frac{k}{\varphi} \quad \text{of} \quad z\varphi = k;$$

zoodat nu de vergelijking (33) uit elke der vergelijkingen (8) en (17) is afgeleid geworden.

Neemt men eindelijk in (30) $\alpha = \frac{k}{r}$, dan wordt die vergelijking

$$z\left(\varphi + \frac{k}{r}\right) = k,$$

waaruit volgt

$$z = \frac{k}{\varphi + \frac{k}{r}} = \frac{r}{\frac{r\varphi}{k} + 1};$$

en ſtelt men nu hierin $k = \infty$, dan komt er $z = r$, even als in het vijfde geval gevonden is.

---

## VII^de GEVAL.

$1 - 2mp^2 = -\infty$, $B = -\infty$, doch $\frac{1 - 2mp^2}{B}$ *eindig*.

Voor dit geval zal men, in de formulen van het derde geval, ſlechts $n = \infty$ en $k = 0$ behoeven te ſtellen, als wanneer $nk = a$ de vierkantswortel uit de eindige waarde van $\frac{1 - 2mp^2}{B}$ is.

Stelt men in de vergelijking (18) $n = \infty$, dan vindt men, voor alle mogelijke waarden van $z$,

$$\varphi + \alpha = 0 \quad \text{of} \quad \varphi = -\alpha; \quad . \ . \ . \ . \ . \ (34)$$

hetgeen de polaire vergelijking is van eene regte lijn, welke, uit den oorſprong getrokken, met den oorſprong der hoeken eenen hoek $\alpha$ maakt. Maar in de vergelijking (18) kan $z$ geene poſitieve of negatieve waarde grooter dan $a$ hebben, zonder tot onbeſtaanbare vormen aanleiding te geven. Derhalve is in dit geval de loop-

loopbaan eene regte lijn O A (Fig. 20), welke door den oorſprong O gaat, en zich aan weêrszijden van dien oorſprong ſlechts tot op eenen afſtand O A $=a$ uitbreidt.

Voor eene oneindig groote waarde van $n$ is $1+n^2=n^2$; derhalve geven de formulen (20) en (21), door $n=\infty$, $k=0$ en $nk=a$ te nemen,

$$V=\sqrt{2m}\left\{\frac{1}{z^2}-\frac{1}{a^2}\right\}, \quad \ldots \quad (35)$$

en

$$Tang.\ \psi=0. \quad \ldots \quad (36)$$

Deze vergelijkingen bevestigen, dat de loopbaan eene regte lijn is, welke zich aan weêrszijden van den oorſprong ter lengte $a$ uitbreidt. Want daar $\psi$ ſtandvastig nul is, is de beweging altijd volgens den voerſtraal gerigt; terwijl voor $z^2 > a^2$ de ſnelheid onbeſtaanbaar wordt. Wanneer het ligchaam zich van het middelpunt O der aantrekkende kracht verwijdert, zal blijkens de formule (35) deszelfs ſnelheid afnemen, tot dat die ſnelheid, op den afſtand O A $=a$, nul wordt. Is verder O B $=z$, dan blijkt uit de formule (35) almede, door tevens op de vroeger gevondene formule (28) acht te geven, dat het vierkant der ſnelheid in het punt B gelijk is aan het vierkant der ſnelheid in den cirkel, die O B tot ſtraal heeft, verminderd met het vierkant van de ſnelheid in den cirkel, die O A tot ſtraal heeft.

Begint het ligchaam in het punt A, door de werking der onderſtelde middelpuntskracht, vrijelijk te vallen, dan zal door de vergelijking (35), in elk punt, de ſnelheid der dalende beweging worden aangegeven. Daar nu de tijd van den val in het algemeen is

$$T=\int\frac{\delta z}{V},$$

zoo vindt men hieruit ligtelijk

$$T=\frac{a\sqrt{(a^2-z^2)}}{\sqrt{2m}};$$

of, de ſnelheid in den cirkel, die $a$ tot ſtraal heeft, door $c$ voorſtellende, als wanneer volgens (28) $c=\frac{\sqrt{2m}}{a}$ is,

$$T=\frac{1}{c}\sqrt{(a^2-z^2)}.$$

Door

Door hierin $z=0$ te nemen, vindt men, voor den tijd van den vrijen val door den afstand $OA=a$,

$$T=\frac{a}{c}.$$

---

## VIII^ste GEVAL.

$1-2mp^2=-\infty$, $B=+\infty$, doch $\frac{1-2mp^2}{-B}$ *eindig*.

Voor dit geval zal men, in de formulen van het tweede geval, $n=\infty$ en $k=0$ moeten stellen, als wanneer $nk=a$ eindig zal wezen. De vergelijkingen (12), (14) en (15) gaan hierdoor over in:

$$\varphi+\alpha=0 \text{ of } \varphi=-\alpha, \quad \ldots \quad (37)$$

$$V=\sqrt{2m}\left\{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{a^2}\right\}, \quad \ldots \quad (38)$$

en

$$Tang.\,\psi=0; \quad \ldots \quad (39)$$

kunnende alsnu $z$ van 0 af tot in het oneindige aangroeijen.

Het ligchaam doorloopt dus wederom eene regte lijn OA (Fig. 20), welke door den oorsprong O is getrokken, maar nu tot in het oneindige voortloopt.

Is wederom $OA=a$ en $OB=z$, dan is het vierkant der snelheid in het punt B gelijk aan het vierkant der snelheid in den cirkel, die OB tot straal heeft, vermeerderd met het vierkant der snelheid in den cirkel, die OA tot straal heeft.

Wanneer het ligchaam zich van den oorsprong verwijdert, neemt deszelfs snelheid wederom af, tot dat, op een' oneindigen afstand, de snelheid standvastig wordt, en alsdan gelijk is aan de snelheid in den cirkel, die $a$ tot straal heeft.

---

Het is, na het verhandelde, niet moeijelijk den vorm der loopbaan te bepalen, wanneer bekend zijn: de hoegrootheid der middel-

middelpuntskracht, benevens de fnelheid en de rigting der aanvankelijke beweging van het ligchaam, op eenen gegevenen afftand van het middelpunt van aantrekking.

Zij O (Fig. 21) het middelpunt van aantrekking; laat het ligchaam zich in A, op den afftand $OA = r$ van dat middelpunt, bevinden, en aldaar eene fnelheid $v$ hebben in eene rigting, welke met OA eenen hoek $\beta$ maakt. Laat verder als bekend worden aangenomen, dat een ligchaam door de middelpuntskracht, op den afftand $OA = r$, in eenen cirkel rondgevoerd wordende, eene fnelheid $c$ hebbe; dat is met andere woorden, indien, het ligchaam zich in A bevindende, de verfnelling der middelpuntskracht $G$ is, ftelle men $\sqrt{2rG} = c$. Alsdan hebben wij, ter bepaling der ftandvastige grootheden:

$$2m = r^2 c^2,$$

$$p = \frac{1}{vr \, Sin. \, \beta},$$

$$B = \frac{v^2 - c^2}{v^2 r^2 \, Sin.^2 \beta} = \pm \frac{1}{k^2},$$

$$1 - 2mp^2 = \frac{v^2 \, Sin.^2 \beta - c^2}{v^2 \, Sin.^2 \beta} = \pm n^2;$$

terwijl, zoo als wij reeds meermalen hebben opgemerkt, $\alpha$ bepaald wordt door de keuze van den oorfprong der hoeken.

De rigting der aanvankelijke beweging van het ligchaam ftrekt zich uit in de rigting van den voerftraal OA, of maakt met dien voerftraal eenen regten, fcherpen of ftompen hoek. Wij zullen elk dezer gevallen afzonderlijk befchouwen, ten einde op eene beknopte wijze te kunnen aantoonen, hoe de vorm der loopbaan van de aanvankelijke fnelheid afhangt.

*De rigting der aanvankelijke beweging in de rigting van den voerftraal.*

De beweging gefchiedt nu in de regte lijn OA. Hierbij kunnen drie gevallen plaats hebben.

*Ten eerfte*, $v < c$. In dit geval wordt de grootfte afftand, op welken het ligchaam zich van het middelpunt van aantrekking verwijdert, door $\frac{rc}{\sqrt{(c^2 - v^2)}}$ uitgedrukt.

*Ten*

*Ten tweede*, $v = c$. In dit geval gaat het ligchaam tot op eenen oneindigen afstand van den oorsprong, en is aldaar deszelfs snelheid nul.

*Ten derde*, $v > c$. Ook in dit geval gaat het ligchaam tot in het oneindige voort, maar zal het op eenen oneindigen afstand de snelheid $\sqrt{(v^2 - c^2)}$ verkrijgen.

*De rigting der aanvankelijke beweging loodregt op den voerstraal.*

Ook hier heeft men drie gevallen te onderscheiden.

*Ten eerste*, $v = c$. In dit geval beweegt het ligchaam in een' cirkel; en behoudt daarbij standvastig de oorspronkelijke snelheid.

*Ten tweede*, $v > c$. In dit geval wordt de loopbaan door de vergelijking (11) voorgesteld; zijnde O A de oorsprong der hoeken, en $a = r$.

*Ten derde*, $v < c$. In dit geval wordt de loopbaan door de vergelijking (22) voorgesteld; zijnde wederom O A de oorsprong der hoeken, en $a = r$.

*De rigting der aanvankelijke beweging maakt met den voerstraal eenen scherpen of stompen hoek.*

Hier heeft men vijf gevallen te onderscheiden.

*Ten eerste*, $v = c$. De loopbaan wordt nu door de vergelijking (24) voorgesteld. Neemt men $O A = r$ tot oorsprong der hoeken aan, dan moet in die vergelijking, voor $\varphi = 0$, $z = r$ worden; waardoor zij wordt $z = r\, e^{n\varphi}$.

*Ten tweede*, $v\, Sin.\,\beta = c$. De loopbaan wordt nu voorgesteld door de vergelijking (30). Daarin is dan $k = r\, Tang.\,\beta$, en zoo men O A tot oorsprong der hoeken neemt $a = Tang.\,\beta$, waardoor de vergelijking is $z\,(\varphi + Tang.\,\beta) = r\, Tang.\,\beta$.

*Ten derde*, $v\, Sin.\,\beta > c$. De loopbaan wordt nu door de vergelijking (8) voorgesteld. Zijnde $a = \frac{r\sqrt{(v^2 Sin.^2\beta - c^2)}}{\sqrt{(v^2 - c^2)}}$, $n =$

$\sqrt{(v^2}$

$\frac{\sqrt{(v^2 \, Sin.^2 \, \beta - c^2)}}{v \, Sin. \, \beta}$, en, wanneer men O A $= r$ tot oorſprong der hoeken neemt, $\omega = \frac{1}{n}$ *Boog Sec.* $\frac{r}{a} = \frac{v \, Sin. \, \beta}{\sqrt{(v^2 \, Sin.^2 \, \beta - c^2)}}$ $\times$ *Boog Sec.* $\frac{\sqrt{(v^2 - c^2)}}{\sqrt{(v^2 \, Sin.^2 \, \beta - c^2)}}$.

Tot dit geval behooren ook de meer bijzondere gevallen $v = \infty$ en $c = 0$; de loopbaan is in deze beide gevallen eene regte lijn.

*Ten vierde*, $v \, Sin. \, \beta < c$ en $v > c$. De loopbaan wordt alsnu door de vergelijking (12) of (13) voorgeſteld. In die vergelijking is dan $a = \frac{r \sqrt{(c^2 - v^2 \, Sin.^2 \, \beta)}}{\sqrt{(v^2 - c^2)}}$, $n = \frac{\sqrt{(c^2 - v^2 \, Sin.^2 \, \beta)}}{v \, Sin. \, \beta}$, en, wanneer men O A $= r$ tot oorſprong der hoeken aanneemt, $\omega = \frac{1}{2n}$ *Nep. Log.* $\frac{\sqrt{(r^2 + a^2)} - a}{\sqrt{(r^2 + a^2)} + a} = \frac{v \, Sin. \, \beta}{2\sqrt{(c^2 - v^2 \, Sin.^2 \, \beta)}}$ $\times$ *Nep. Log.* $\frac{v \, Cos. \, \beta - \sqrt{(c^2 - v^2 \, Sin.^2 \, \beta)}}{v \, Cos. \, \beta + \sqrt{(c^2 - v^2 \, Sin.^2 \, \beta)}}$.

*Ten vijfde*, $v < c$. De loopbaan wordt in dit laatſte geval voorgeſteld door de vergelijking (18) of (19). Daarin is dan $a = \frac{r \sqrt{(c^2 - v^2 \, Sin.^2 \, \beta)}}{\sqrt{(c^2 - v^2)}}$, $n = \frac{\sqrt{(c^2 - v^2 \, Sin.^2 \, \beta)}}{v \, Sin. \, \beta}$, en, wanneer men O A $= r$ tot oorſprong der hoeken neemt, $\omega = \frac{1}{2n}$ *Nep. Log.* $\frac{a - \sqrt{(a^2 - r^2)}}{a + \sqrt{(a^2 - r^2)}} = \frac{v \, Sin. \, \beta}{2\sqrt{(c^2 - v^2 \, Sin.^2 \, \beta)}}$ $\times$ *Nep. Log.* $\frac{\sqrt{(c^2 - v^2 \, Sin.^2 \, \beta)} - v \, Cos. \, \beta}{\sqrt{(c^2 - v^2 \, Sin.^2 \, \beta)} + v \, Cos. \, \beta}$.

Tot dit laatſte geval behoort ook het meer bijzondere $v = 0$; de beweging geſchiedt dan volgens de regte lijn A O.

---

# VERHANDELING

OVER

# DE BEWEGING VAN EENEN TOL OM ZIJNE PUNT,

HITSGADERS OVER

## DE WETTEN, VOLGENS WELKE EEN DRAAIJENDE RING, DOOR EENEN GROOTEREN CONCENTRIEKEN VASTEN RING AANGETROKKEN WORDENDE, ZICH OM ZIJN MIDDELPUNT BEWEEGT.

DOOR

*F. J. STAMKART.*

*In de eerste der wetenschappelijke Wintervergaderingen van het afgeloopene jaargetijde, werd, ter vervulling mijner spreekbeurt, de verklaring gegeven van de bewegingen van eenen tol om zijne punt, gelijk dit in het verslag dier Vergaderingen breeder is vermeld. Zoo als natuurlijk is, konden bij die gelegenheid echter alleen de gronden aangewezen worden, waarop de theorie van de bewegingen des tols berusten. De theorie zelve, het volledige bewijs der formulen, is te uitgebreid en ook te ingewikkeld, om bij eene mondelinge voordragt van 1 à 1½ uur verstaanbaar te worden. Ik bied dezelve dus mijnen geachten Medeleden thans onder eenen anderen vorm aan, als eene Bijdrage tot de Wis- en Natuurkundige Verhandelingen des Genootschaps. Tevens is hierbij gevoegd de theorie der beweging van eenen draaijenden ring om zijn middelpunt, wanneer die ring door eenen grooteren, hetzelfde middelpunt hebbende, maar vasten ring, wordt aangetrokken. Deze laatste theorie, waarvan in genoemde Vergadering slechts met een enkel woord gewag is gemaakt, geeft de oplossing eener prijsvraag, door het Genootschap het laatst uitgeschreven onder No. 4 in het jaar 1842, doch die onbeantwoord is gebleven.*

*De*

*De bewegingen der as van eenen tol, kunnen ons door aanschouwing een denkbeeld geven van de beweging van de as der aarde, die den teruggang der evennachts-punten ten gevolge heeft. Evenzoo stemt ook de beweging des kleinen rings zeer na overeen met de standsverandering van het vlak van den Equator in de ruimte, en zij is daarom door* LA PLACE — Exposition du système du monde, *Chap. XIII — aangevoerd, met het doel, om den teruggang der evennachts-punten te verklaren. Deze overeenkomst is gewis nog weinig bekend en toch zeer merkwaardig; het zij mij vergund, hierop vooral de aandacht te vestigen, omdat het een voorbeeld is van het verband tusschen groote en, schijnbaar, kleine verschijnselen in de Natuur — iets dat niet genoeg kan opgemerkt worden. —*

*Ik heb hier nog slechts dit bij te voegen, dat ik gemeend heb, het bewijs der vergelijkingen* (2), (4) *en* (5), *schoon ik het wel als bekend had mogen aannemen, echter hier te behouden, omdat daardoor het geheel meerder éénheid bekomt, zoodat lezers, die er niet mede bekend mogten zijn, het niet elders behoeven na te zoeken.*

Amsterdam, den 10den Junij 1847.

F. J. STAMKART.

## OVER DE BEWEGINGEN VAN EENEN TOL OM ZIJNE PUNT.

### § 1.

Laat (Fig. 1) $Z'A$ de as van eenen tol voorſtellen, C B D eene doorſnede, regthoekig aan die as, dan zullen wij, eenvoudigheidshalve, aannemen, dat de tol alleen beſtaat uit deze as en het vlak B C D. De as zullen wij zonder zwaarte onderſtellen, en van het vlak, dat de masſieve punten alleen aan den omtrek des cirkels P C D gelegen zijn, zoodat onze tol alleen beſtaan zal uit eene onbuigbare wiskundige lijn als as, met eenen daaraan verbonden massieven ring, zonder dikte of breedte.

Onderſtellen wij voorts, dat de punt A zonder wrijving op een horizontaal vlak rust, maar daarover niet kan voortbewegen, zoodat A een vast punt zijn zal, waarom het ligchaam des tols in alle mogelijke rigtingen vrijelijk kan wentelen. Dan is de vraag, die wij willen oplosſen, deze:

Welke beweging zal de tol aannemen (*), indien hem om de as $AZ'$ eene zeer ſnelle draaijende beweging wordt gegeven, terwijl hij tevens aan de werking der zwaartekracht onderworpen blijft?

Brengen wij door A een stelsel van coördinaten-asſen, zoodanig, dat de as der $z'$ vertikaal en de asſen der $x$ en $y$ horizontaal zijn, dan kunnen wij, op elk oogenblik, de ſnelheid van eenig punt P van den omtrek des cirkels C B D ontbonden ons voorſtellen in rigtingen evenwijdig aan die asſen.

Zij de ſnelheid van P,

$$\left.\begin{array}{l}\text{evenwijdig aan de as } AX \;\ldots\ldots\; S\\ \text{evenwijdig aan de as } AY \;\ldots\ldots\; S'\\ \text{evenwijdig aan de as } AZ \;\ldots\ldots\; S''\end{array}\right\}$$

Wij

(*) Om de gedachten beter te bepalen, wordt hier alleen een tol genoemd, maar ligtelijk blijkt het, dat tot in § 5 de formulen geheel algemeen doorgaan voor elk ligchaam, dat zich om een vast punt beweegt.

Wij onderstellen deze snelheden positief, wanneer de beweging van het punt zoodanig is, dat het zich van den oorsprong A naar de drie rigtingen *verwijdert*.

Dan zijn ongetwijfeld in een volgend oogenblik de snelheden van het punt P geworden:

evenwijdig aan de as AX . . . . $S + \delta S$
evenwijdig aan de as AY . . . . $S' + \delta S'$
evenwijdig aan de as AZ . . . . $S'' + \delta S''$.

Maar indien het massieve punt P niet aan den ring ware verbonden geweest, zoodat het geheel vrij in de ruimte zich had kunnen bewegen, dan zoude het, in het volgende oogenblik, niet deze snelheden gehad hebben, maar wel de volgende, te weten:

evenwijdig aan de as AX . . . . $S$
evenwijdig aan de as AY . . . . $S'$
evenwijdig aan de as AZ . . . . $S'' - g\,\delta t$

Zijnde $g$ de dubbele ruimte, welke een vrij vallend ligchaam in de eerste seconde van deszelfs val doorloopt.

Daar nu P, door den zamenhang der deelen, gedwongen is om van de vrije beweging af te wijken, zoo ontstaat hieruit eene drukking, welke het punt P van het geheele ligchaam ondervindt; en deze drukking zal evenredig zijn:

in de rigting AX aan . $(S + \delta S) - S = \delta S$;
in de rigting AY aan . $(S' + \delta S') - S' = \delta S'$;
in de rigting AZ aan . $(S'' + \delta S'') - (S'' - g\,\delta t) = \delta S'' + g\,\delta t$.

Vermenigvuldigt men deze differentialen met de massa $m$ van het punt P, dan vindt men voor de genoemde drukkingen zelve de volgende waarden, te weten:

in de rigting AX . . . $m\,\delta S$;
in de rigting AY . . . $m\,\delta S'$;
in de rigting AZ . . . $m\,\delta S'' + g\,m\,\delta t$.

Elk der punten P van den ring BCD geven aanleiding tot dezelfde redenering, en dus ook tot dezelfde formulen voor de drukkingen, die zij van het eene oogenblik tot het andere ondervinden van het ligchaam, waaraan zij te zamen verbonden zijn. Men ziet dus, dat er onder de beweging drukkingen op alle pun-

punten, waaruit het ligchaam bestaat, moeten plaats hebben; met andere woorden, dat er in het ligchaam krachten werkzaam zijn, die hetzelve zouden verbreken, indien de zamenhang der deelen dit niet belette. Het is echter klaar, dat al die drukkingen geene beweging aan het geheele ligchaam kunnen mededeelen, daar anders in het volgende oogenblik de snelheden van P niet meer $S + \delta S$, $S' + \delta S'$, $S'' + \delta S''$ zouden zijn, hetgeen tegen de onderstelling is. Die drukkingen dus, te zamen genomen over het geheele ligchaam, moeten onderling *evenwigt* maken. Wij kunnen alzoo onderstellen, dat op al de punten P van den ring drie krachten, $m\delta S$, $m\delta S'$ en $m\delta S'' + mg\delta t$, werken, en de voorwaarden zoeken, waaraan die krachten voldoen moeten, om evenwigt te maken.

## § 2.

De zes bekende algemeene voorwaarden van het evenwigt tusschen eenige krachten, die op een ligchaam werken, herleiden zich in ons geval, waarbij een vast punt A ondersteld is, tot slechts *drie*, te weten, dat de drie sommen der momenten ten opzigte der drie assen AX, AY en AZ elk gelijk *nul* moeten zijn.

Het moment, dat uit de kracht, in het punt P werkende, ontstaat, om den tol te doen draaijen om de as AZ, is nu, het $\delta k$ noemende:

$$x m \delta S' - y m \delta S = \delta k.$$

Waarvoor wij schrijven kunnen:

$$m \delta (x S' - y S).$$

Want, daar de snelheid gelijk is aan den afgelegden weg, gedeeld door den tijd, zoo is

$$S = \frac{\delta x}{\delta t} \text{ en } S' = \frac{\delta y}{\delta t},$$

en mitsdien

$$\delta(x S' - y S) = x \delta S' - y \delta S + S' \delta x - S \delta y = x \delta S' - y \delta S.$$

Zij nu (Fig. 2) $p$ de projectie van het punt P op het vlak der $xy$, $p'$ de projectie van datzelfde punt na een oogenblik $\delta t$, dan is $pq = \delta x$ en $pq' = \delta y$. Trekken wij de lijnen of voer-

 stra-

ſtralen A$p$ en A$p'$, dan ontſtaat het driehoekje A$pp'$, waarvan het bekend is, dat de oppervlakte uitgedrukt wordt door

$$\tfrac{1}{2}(x\,\delta y - y\,\delta x) = \delta V;$$

dus bekomen wij

$$m(x S' - y S) = 2m\frac{\delta V}{\delta t}$$

en
$$\delta k = 2m\,\delta\left(\frac{\delta V}{\delta t}\right) \quad \ldots\ldots (1).$$

Daar nu V het *vlak* of *perk* is, door den voerſtraal A$p$ in eenen zekeren tijd doorloopen, en $\delta$V de differentiaal van dit perk, zoo volgt, dat het moment van de *kracht*, welke het punt P van het ééne oogenblik op het andere uitoefent, om den tol te doen draaijen om de as A Z, gelijk is aan de tweede differentiaal van het perk, beſchreven door den voerſtraal A$p$, gedeeld door de differentiaal van den tijd, en vermenigvuldigd met tweemaal de masſa van het punt P.

De ſom dezer momenten van alle punten P gelijk *nul* moetende zijn, zoo verkrijgen wij hierdoor de vergelijking

$$\Sigma\, m\,\delta\left(\frac{\delta V}{\delta t}\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Het differentiaal teeken $\delta$ heeft hier betrekking tot de veranderingen, die *in den tijd* voorvallen; het sommatie- of integraalteeken $\Sigma$ heeft betrekking tot de verſchillende punten P, P' enz., die op den omtrek van den ring gelegen zijn; daarom is het duidelijk, dat deze teekens elkander niet te niet doen.

Het moment, dat de kracht in P voortbrengt, om het ligchaam rondom de as A Y te bewegen, is

$$x(m\,\delta S'' + mg\,\delta t) - z(m\,\delta S)$$
$$= m(x\,\delta S'' - z\,\delta S) + m\,x\,g\,\delta t = \delta k'.$$

Wanneer weder $r$ de projectie van het punt P op het vlak $xz$ is (Fig. 3), $r'$ de projectie van dat punt in een volgend oogenblik; zoo wij ook weder de voerſtralen A$r$ en A$r'$ trekken, en het driehoekje A$rr'$ $\delta$V noemen, dan vinden wij, op dezelfde wijze als boven:

$$\delta k' = 2m\,\delta\left(\frac{\delta V'}{\delta t}\right) + m\,x\,g\,\delta t \quad \ldots\ldots (3).$$

Dat

Dat is: het moment der kracht, welke het punt P, van het eene oogenblik op het andere uitoefent, om den tol om de as A Y te draaijen, is gelijk aan de tweede differentiaal van het perk, beschreven door de projectie A $r$ van den voerstraal A P (Fig. 1) op het vlak $x z$, gedeeld door de differentiaal van den tijd en vermenigvuldigd met tweemalen de masfa van het punt P; vermeerderd nog met het product dezer zelfde masfa, de ordinaat $x$ en de differentiaal der snelheid van een vrij vallend ligchaam.

De *som* dezer momenten ten opzigte der as A Y van alle punten P gelijk *nul* moetende zijn, zoo bekomen wij

$$\Sigma m \delta\left(\frac{\delta V'}{\delta t}\right) + \tfrac{1}{2} g \, \delta t \, \Sigma m x = 0,$$

of, wanneer wij opmerken, dat $\Sigma m x$, — dat is, de som der masfa's $m$, elk vermenigvuldigd met de ordinaat $x$, — blijkbaar gelijk is aan de geheele masfa M des tols, vermenigvuldigd met de ordinaat X van hét zwaartepunt B:

$$\Sigma m \delta\left(\frac{\delta V'}{\delta t}\right) + \tfrac{1}{2} M X g \, \delta t = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Eindelijk, wanneer wij op dezelfde wijze schrijven:

$$y S'' - z S' = 2 \frac{\delta V''}{\delta t},$$

zoodat V″ het perk voorstelt, beschreven door de projectie van den voerstraal A P op het vlak $y z$, komt er

$$\Sigma m \delta\left(\frac{\delta V''}{\delta t}\right) + \tfrac{1}{2} M Y g \, \delta t = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5),$$

waarbij Y de coördinaat van het zwaarte-middelpunt B is.

Deze drie vergelijkingen (2), (4) en (5) bevatten al de wetten van beweging van het ligchaam des tols om het punt A.

## § 3.

De vergelijking (2) kan, ten opzigte van den tijd, dat is, met betrekking tot het differentiaalteeken $\delta$, terstond geïntegreerd worden. Zij A eene standvastige grootheid, dan bekomen wij

$$\Sigma m \frac{\delta V}{\delta t} = A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

F 3 En,

En, nogmaals integrerende, de integraal met $t = o$ aanvangende,

$$\Sigma m V = A t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Hieruit volgt, dat, hoedanig ook de beweging des tols zijn mag, altijd de *som der perken*, beschreven door de projectiën der voerstralen om het punt A op het horizontale vlak, elk vermenigvuldigd met de massa van het punt, waartoe de voerstraal behoort, *evenredig aan den tijd zijn zal*; of, anders gezegd, volgens (6): de som van de differentiaal quotienten der voornoemde perken ten opzigte van den tijd, vermenigvuldigd met de massa's der punten P, zal altijd eene standvastige grootheid (A) zijn. Men noemt deze stelling: het *grondbeginsel van de standvastigheid der perken* (*le principe de la conservation des aires*). Hetzelve gaat door, welke gedaante, regelmatig of onregelmatig, het draaijende ligchaam mag hebben; want tot nu toe hebben wij in onze redenering geene bepaalde gedaante van den tol ondersteld.

Uit dit grondbeginsel volgt reeds, dat een draaijende tol onmogelijk kan vallen, zonder dat de as zich voortdurend in een ander vertikaal vlak plaatst. Want het is ligt te zien, dat, indien de tol, om zijne as wentelende, zoude ondersteld worden neder te storten, op dezelfde wijze als bijv. een stok nedervalt, wanneer men dien op de punt zet en loslaat, zoodat de as onder het vallen in hetzelfde vertikale vlak blijft, dat dan de som $\Sigma m \frac{\partial V}{\partial t}$ zoude moeten verminderen, hetgeen onmogelijk is.

De beide vergelijkingen (4) en (5) kunnen niet, even als (2), terstond geïntegreerd worden; men kan slechts schrijven, A' en A'' twee standvastige grootheden zijnde:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma m \frac{\partial V'}{\partial t} &= A' - \tfrac{1}{2} M g \int X \partial t \\ \Sigma m \frac{\partial V''}{\partial t} &= A'' - \tfrac{1}{2} M g \int Y \partial t \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8).$$

Waaruit men ziet, dat de som der perken, door de projectiën der voerstralen op een vertikaal vlak (dat van $x z$ of $y z$) om het punt A beschreven, vermenigvuldigd met de massa's der punten P, niet evenredig aan den tijd is. De vergelijkingen (8) voeren tot de beweging eens zamengestelden slingers, wanneer men geene

wen-

wenteling om de as $AZ'$ onderstelt, of ook, wanneer men de geheele massa van den tol in die as vereenigd denkt.

## § 4.

Wij kunnen aan de vergelijkingen (4) en (5) in het algemeen nog eene andere gedaante geven. Laat daartoe (Fig. 1) $AK$ en $BK'$ twee lijnen zijn, door $A$ en $B$ evenwijdig getrokken aan de lijn van doorsnijding der vlakken $AXY$ en $BCD$. Zij de hoek $KAX = \psi$, en stellen wij ons een vertikaal vlak voor, dat door de lijn $AK$ gaat, het vlak $ZAK$. Dan merken wij vooreerst op, dat, indien de projectiën der perken door de voerstralen beschreven, — hetgeen hetzelfde is, als de perken door de projectiën der voerstralen beschreven, — op de vlakken $ZAK$ en $ZAZ'$ bekend zijn, men ligtelijk die op de vlakken $ZAX$ en $ZAY$ bekomt. Zij, om dit aan te wijzen, $A'ZK$ (Fig. 4) een spherische driehoek, met de drie zijden elk van 90°. Laat $V$ een gedeelte van zeker vlak $ACDE$ zijn, gaande door het middelpunt $A$ des bols; $C$ en $E$ de hoeken, die dit vlak met de vlakken $ZA'$ en $ZK$ maakt, en $D = ZDC$ de hoek, die datzelfde vlak met het vlak $ZAX$ maakt, en zij

$V_1$ de projectie van het perk $V$ op het vlak $ZA'$,
$V_2$ » » $V$ » $ZK$,
$V_3$ » » $V$ » $ZX$;

dan is, de hoeken $C$, $D$ en $E$ scherp stellende,

$$V_1 = V\ Cos.\ C,\quad V_2 = V\ Cos.\ E,\quad V_3 = V\ Cos.\ D.$$

Maar wij hebben uit de spherische driehoeksmeting, als de hoek $KZX = \psi$ en $A'ZX = 90° - \psi$ is,

$$Cos.\ D = -\ Cos.\ C\ Sin.\ \psi + Cos.\ E\ Cos.\ \psi;$$

dus ook $$V_3 = -\ V_1\ Sin.\ \psi + V_2\ Cos.\ \psi.$$

Om de projectie op het vlak $ZAY$ te vinden, behoeven wij slechts $\psi$ in $-90 + \psi$ te veranderen.

Zij dus $M\delta Q$ de som der projectiën van de perkjes door de voerstralen, in het oogenblik $\delta t$, beschreven op het vlak $ZA'$, en $M\delta Q'$ die som op het vlak . . . . $ZK$, elke projectie vermenigvuldigd met de massa $m$, dan is

 $\Sigma m\delta V'$

$$\begin{aligned} \Sigma m \delta V' &= - M \, Sin.\psi \delta Q + M \, Cos.\psi \delta Q', \\ \Sigma m \delta V'' &= + M \, Cos.\psi \delta Q + M \, Sin.\psi \delta Q'. \end{aligned} \quad . \quad (9).$$

Zij nog $X^2 + Y^2 = U^2$,

dan is, in overeenstemming met Fig. 1,

$$X = U \, Sin.\psi \text{ en } Y = - U \, Cos.\psi.$$

Dus worden de vergelijkingen (4) en (5) nu

$$\delta \{ - Sin.\psi \delta Q + Cos.\psi \delta Q' \} = - \tfrac{1}{2} g U \, Sin.\psi \delta t^2,$$

$$\delta \{ Cos.\psi \delta Q + Sin.\psi \delta Q' \} = + \tfrac{1}{2} g U \, Cos.\psi \delta t^2.$$

Wanneer men de differentiatiën, in de eerste leden dezer vergelijkingen aangewezen, werkelijk verrigt; daarna de eerste vergelijking met *Cos.* $\psi$ en de tweede met *Sin.* $\psi$ vermenigvuldigt, en de producten te zamen voegt; vervolgens de eerste vergelijking met *Sin.* $\psi$ en de tweede met *Cos.* $\psi$ vermenigvuldigt, en het eerste product van het tweede aftrekt, zoo vindt men gemakkelijk:

$$\left. \begin{aligned} \delta^2 Q' - \delta Q \, \delta\psi &= 0 \\ \text{en} \quad \delta^2 Q + \delta Q' \, \delta\psi &= \tfrac{1}{2} g U \delta t^2 \end{aligned} \right\} \quad . \; . \; . \quad (10).$$

De waarde van $\delta\psi$ uit de eerste dezer vergelijkingen in de tweede stellende, komt nog:

$$\delta Q \, \delta^2 Q + \delta Q' \, \delta^2 Q' = \tfrac{1}{2} g U \delta Q \, \delta t^2,$$

of

$$\delta \left\{ \frac{\delta Q^2}{\delta t^2} + \frac{\delta Q'^2}{\delta t^2} \right\} = g U \delta Q.$$

Wij hebben alzoo thans ter bepaling van de beweging des tols om het punt A, of in het algemeen van de beweging van een ligchaam om een vast punt, de drie volgende vergelijkingen, waarbij voor de standvastige grootheid A, M A geschreven is, en $\Sigma m \delta V = M \delta Q^\circ$ is aangenomen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta Q^\circ}{\delta t} &= A, \\ \delta \left\{ \left(\frac{\delta Q}{\delta t}\right)^2 + \left(\frac{\delta Q'}{\delta t}\right)^2 \right\} &= g U \delta Q, \\ \frac{\delta^2 Q'}{\delta t^2} - \frac{\delta Q}{\delta t} \cdot \frac{\delta \psi}{\delta t} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad . \quad (11).$$

$Q^\circ$ som van de producten, ontstaande wanneer men de horizontale projectiën der perken, door de voerstralen van de punten P beschreven, vermenigvuldigt met de betrekkelijke digtheden dier punten.

Q ſom der producten, op dezelfde wijze gevormd, indien men de projectiën der perken op een vertikaal vlak neemt, dat door het vaste punt A en het zwaartepunt des ligchaams gaat.

Q′ ſom der producten van de projectiën der perken en digtheden, zoo tót vlak van projectie een tweede vertikale vlak genomen wordt, regthoekig aan het eerſte.

U afſtand van de projectie van het zwaartepunt op het horizontale vlak tot het vaste punt.

$\frac{\partial \psi}{\partial t}$ snelheid van wenteling van de beide genoemde vertikale vlakken, om de vertikale lijn gaande door het vastepunt A.

## § 5.

Om nader de beweging des tols te leeren kennen, moeten wij nu de waarden der grootheden $\frac{\partial Q^\circ}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial t}$ en $\frac{\partial Q'}{\partial t}$, in functie van de ſnelheid van wenteling om de as A Z, en van de ſnelheden van de verplaatſingen dier as in twee rigtingen, bepalen. Deze laatſte rigtingen kunnen het gevoegelijkst zijn: eene vertikale en eene horizontale of liever azimuthale.

Laat door het zwaartepunt B (Fig. 1) des tols twee asſen, B X′ en B Y′, regthoekig op elkander en op de as A Z′ getrokken zijn; welke asſen wij onveranderlijk in het ligchaam zelve van den tol onderſtellen, en dus beweeglijk in de ruimte. De plaats van het punt P wordt dan door twee verſchillende ſtelsels van coördinaten aangewezen, als:

1°. door de reeds gebezigde coördinaten $x$, $y$, $z$ in de ruimte.

2°. door de coördinaten . . . . . $x'$, $y'$, $z'$ in het ligchaam van den tol.

Den oorſprong van het tweede ſtelsel kiezen wij mede in A.

Zij verder: De overhelling van de as des tols, $ZAZ' = \beta$, A K en B K′, evenwijdig aan de doorſnijding der vlakken $xy$ en $x'y'$, dat is aan de *lijn der knoopen*,

$$XAK = \psi,$$
$$X'BK' = \varphi,$$
$$X'BP = \lambda.$$

Voorts $AB = a$, $BP = r$ en $\angle BAP = \alpha$, en de ordinaten van het punt B, als voren X, Y, Z, in de ruimte. Dan is het met behulp der spherische driehoeksmeting ligt in te zien, dat men heeft:

$$\left.\begin{aligned} Cos.\widehat{Z'Z} &= Cos.\beta, \\ Cos.\widehat{Z'Y} &= -Cos.\psi\ Sin.\beta, \\ Cos.\widehat{Z'X} &= +Sin.\psi\ Sin.\beta, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} Cos.\widehat{X'Z} &= +Sin.\beta\ Sin.\varphi, \\ Cos.\widehat{X'Y} &= +Cos.\beta\ Cos.\psi\ Sin.\varphi + Sin.\psi\ Cos.\varphi, \\ Cos.\widehat{X'X} &= -Cos.\beta\ Sin.\psi\ Sin.\varphi + Cos.\psi\ Cos.\varphi, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} Cos.\widehat{Y'Z} &= +Sin.\beta\ Cos\ \varphi, \\ Cos.\widehat{Y'Y} &= +Cos.\beta\ Cos\ \psi\ Cos.\varphi - Sin.\psi\ Sin.\varphi, \\ Cos.\widehat{Y'X} &= -Cos.\beta\ Sin.\psi\ Cos.\varphi - Cos.\psi\ Sin.\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Bijgevolg is

$$\begin{aligned} X &= +a\ Sin.\beta\ Sin.\psi, \\ Y &= -a\ Sin.\beta\ Cos.\psi, \\ Z &= +a\ Cos.\beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = {} & x'\ (-Cos.\beta\ Sin.\psi\ Sin.\varphi + Cos.\psi\ Cos.\varphi), \\ & + y'\ (-Cos.\beta\ Sin.\psi\ Cos.\varphi - Cos.\psi\ Sin.\varphi), \\ & + z'\ (+Sin.\beta\ Sin.\psi). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = {} & x'\ (+Cos.\beta\ Cos.\psi\ Sin.\varphi + Sin.\psi\ Cos.\varphi), \\ & + y'\ (+Cos.\beta\ Cos.\psi\ Cos.\varphi - Sin.\psi\ Sin.\varphi), \\ & + z'\ (-Sin.\beta\ Cos\ \psi). \end{aligned}$$

$$z = x'\ (Sin.\beta\ Sin.\varphi) + y'\ (Sin.\beta\ Cos.\varphi) + z'\ Cos.\beta;$$

of, wanneer men $x' = r\ Cos.\lambda$, $y' = r\ Sin.\lambda$, $z' = a$ neemt:

$$\begin{aligned} x &= r\,(-Cos.\beta\ Sin.\psi\ Sin.(\lambda+\varphi) + Cos.\psi\ Cos.(\lambda+\varphi)) \\ &\qquad + a\ Sin.\beta\ Sin.\psi, \\ y &= r\,(+Cos.\beta\ Cos.\psi\ Sin.(\lambda+\varphi) + Sin.\psi\ Cos.(\lambda+\varphi)) \\ &\qquad - a\ Sin.\beta\ Cos.\psi, \\ z &= r\,(Sin.\beta\ Sin.(\lambda+\varphi)) + a\ Cos.\beta. \end{aligned}$$

Door differentiëring vindt men uit deze laatste uitdrukkingen, wanneer $\beta$, $\psi$ en $\varphi$ veranderen, de waarden van $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$, en vervolgens $\frac{1}{2}(x\,\delta y - y\,\delta x)$, $\frac{1}{2}(x\,\delta z - z\,\delta x)$ en $\frac{1}{2}(y\,\delta z - z\,\delta y)$, of $\delta V$, $\delta V'$ en $\delta V''$. Daar evenwel het bedrag der projectiën, behalve op het horizontale vlak, op de vlakken ZAZ′ en ZA′K gezocht wordt, zoo kan men aannemen, dat de lijn AX met AK overeenstemt, en dus (met het doel om $\delta Q$ en $\delta Q'$ te vin-

vinden) *na de differentiëring* van $x, y, z, \psi = o$ stellen (*).

Laat $x_0$, $y_0$ en $z_0$ de waarden van $x, y, z$, zijn, als AX met AK voor een oogenblik overeenstemt, dan is

$$x_0 = r \, Cos. (\lambda + \varphi), \; y_0 = r \, Cos. \beta \; Sin. (\lambda + \varphi) - a \; Sin. \beta,$$
$$z_0 = r \, Sin. \beta \; Sin. (\lambda + \varphi) + a \; Cos. \beta.$$
$$\delta x_0 = - r \, Sin. (\lambda + \varphi) \delta \varphi - (r \, Cos. \beta \, Sin. (\lambda + \varphi) - a \, Sin. \beta) \delta \psi,$$
$$\delta y_0 = + r \, Cos. \beta \; Cos. (\lambda + \varphi) \; \delta \varphi + r \; Cos. (\lambda + \varphi) \; \delta \psi$$
$$- (r \, Sin. \beta \; Sin. (\lambda + \varphi) + a \; Cos. \beta) \; \delta \beta,$$
$$\delta z_0 = + r \; Sin. \beta \; Cos. (\lambda + \varphi) \; \delta \varphi + (r \; Cos. \beta \; Sin. (\lambda + \varphi)$$
$$- a \; Sin. \beta) \; \delta \beta.$$

$\delta \beta$ is nu de verandering van den stand der as AZ′ in een vertikaal vlak.

$\delta \psi$ de verandering van dien stand in eene horizontale rigting, of liever de verandering der as in Azimuth.

$\frac{\delta \varphi}{\delta t}$ is, wanneer $\psi$ standvastig onderfteld wordt, de snelheid van wenteling des tols.

Neemt men nu in aanmerking, dat voor de massa $m$ van een punt P geschreven kan worden $M \cdot \frac{\delta \lambda}{2 \pi}$ (†): vermenigvuldigt men

(*) Vóór het differentiëren kan niet $\varphi = o$ genomen worden, want op die wijze zoude de hoek $\varphi$ geheel verdwijnen, en daarmede zoude aangenomen zijn, dat de lijn AK eene standvastige rigting behield, hetgeen geheel onjuist zoude zijn. Thans evenwel rekent men, alsof toevallig $\varphi$ oneindig klein was; alsof men de as AX juist zoo in de rigting AK gesteld had.

(†) Ingeval men zich niet beperkt tot de onderstelling van eenen enkelvoudigen massieven cirkel-omtrek als ring, maar in het algemeen een gelijkslachtig ligchaam aanneemt, dan wordt

$$\frac{m}{M} = \frac{\delta a \cdot r \delta r \cdot \delta \lambda}{\int\int\int \delta a \cdot r \delta r \cdot \delta \lambda}.$$

Is dit ligchaam, zoo als de tol, een omwentelings-ligchaam, dan is

$$\frac{m}{M} = \frac{\delta a \cdot r \delta r}{\int\int \delta a \, r \delta r} \times \frac{\delta \lambda}{2 \pi} = \frac{\delta a \int r \delta r}{\int \delta a \int r \delta r} \times \frac{r \delta r}{\int r \delta r} \times \frac{\delta \lambda}{2 \pi}.$$

Bepaalt men zich alleen tot eenen platten ring, ter dikte van $\delta a$, dan komt

$$\frac{m}{M} = \frac{r \delta r}{\int r \delta r} \times \frac{\delta \lambda}{2 \pi} = \frac{r \delta r}{\frac{1}{2}(R^2 - r^2)} \cdot \frac{\delta \lambda}{2 \pi};$$

zijnde $r$ en R de kleinste en grootste stralen van dien ring.

men dus de waarden der uitdrukkingen $\frac{1}{2}(x_0\,\delta y_0 - y_0\,\delta x_0)$, $\frac{1}{2}(x_0\,\delta z_0 - z_0\,\delta x_0)$ en $\frac{1}{2}(y_0\,\delta z_0 - z_0\,\delta y_0)$ met $\frac{\delta\lambda}{2\pi}$, en neemt dan van elk derzelve de *ſom* voor alle punten P, dat heet: neemt men de integralen ten opzigte van $\lambda$, van o tot $2\pi$, dan komt ten laatſte:

$$\left.\begin{aligned}\delta Q^\circ &= \tfrac{1}{2} r^2\, Cos.\beta\,.\,\delta\varphi + \tfrac{1}{2}(r^2 + (a^2 - \tfrac{1}{2}r^2)\, Sin.^2\beta)\,\delta\psi,\\ \delta Q &= \tfrac{1}{2}(a^2 + \tfrac{1}{2}r^2)\,\delta\beta\\ \delta Q' &= \tfrac{1}{2} r^2\, Sin.\beta\,\delta\varphi - \tfrac{1}{2}(a^2 - \tfrac{1}{2}r^2)\, Sin.\beta\, Cos.\beta\,.\,\delta\psi,\end{aligned}\right\}\ (12).$$

## § 6.

Men kan de uitdrukkingen $\delta Q$ ook nog op de volgende wijze vinden, waarbij elke der bewegingen afzonderlijk in beſchouwing genomen worden.

Zij op een zeker oogenblik $\frac{\delta\varphi}{\delta t}$ de ſnelheid van omwenteling om de as $AZ'$, terwijl wij overigens de as in rust denken. Beſchrijven wij om A als middelpunt eenen bol met eenen ſtraal $AP = R$, dan ligt de omtrek van den cirkel BCD (Fig. 1) geheel in de oppervlakte van dien bol. Laat Z en X (Fig. 5) de punten zijn, waar de asſen AZ en AX het oppervlak des bols ontmoeten; $Z'$ waar dit de as $AZ'$ des tols doet, en brengen wij door Z en $Z'$ het vertikale vlak $Z\,Z'\,A'$.

Laat P een punt van den ring zijn, dat zich, in het oogenblik $\delta t$, van P naar $P'$ beweegt, dan is $P\,Z'\,P' = \delta\varphi$.

Ver-

In dit laatſte geval moeten alzoo de uitdrukkingen $\delta Q^\circ$, $\delta Q$, $\delta Q'$ nog met $r\,\delta r$ vermenigvuldigd, nogmaals tusſchen de grenzen $r$ en R geïntegreerd en dan door $\frac{1}{2}(R^2 - r^2)$ gedeeld worden. Dit doende zal men vinden, dat in die uitdrukkingen ſlechts $r^2$ door $\frac{1}{2}(R^2 + r^2)$ moet vervangen worden, om voor den platten ring te dienen.

Om verder $\delta Q^\circ$, $\delta Q$ en $\delta Q'$ voor het ligchaam eens tols te vinden, moeten deze uitdrukkingen weder met $(R^2 - r^2)\,\delta a$ vermenigvuldigd en ten opzigte van $a$ geïntegreerd worden, waarbij dan R en $r$ functiën van $a$ zijn. Ten laatſte moet dan door $\int (R^2 - r^2)\,\delta a$ gedeeld worden.

Verder is

$$Z A Z' \text{ (Fig. 1)} = Boog\ Z Z' \text{ (Fig. 5)} = \beta,$$
$$Z' A P \text{ (Fig. 1)} = Boog\ Z' P \text{ (Fig. 5)} = \alpha,$$
$$a = R\ Cos.\,\alpha, \qquad r = R\ Sin.\,\alpha.$$

De projectie van den ſtraal A P op het vlak der $x y$ zal nu zijn, volgens Fig. 5, R $Sin.$ Z P. Wanneer P in P′ gekomen is, heeft deze projectie een boogje $p p' = P Z P' = \delta Z$ op het horizontale vlak beſchreven; dus wordt voor het punt P

$$\delta V = \tfrac{1}{2} R^2\, Sin.^2\, Z P\,.\,\delta Z,$$

zijnde $\angle G Z P = Z$; zij ook nu $G Z' P = \lambda$, $G Z' P' = \lambda + \delta\varphi$, dan is, volgens de ſpheriſche driehoeksmeting:

$$Sin.\,Z\,.\,Sin.\,Z P = Sin.\,\alpha\ Sin.\,\lambda;$$

$$Cot.\,Z = \frac{Cos.\,\alpha\ Sin.\,\beta + Cos.\,\lambda\ Sin.\,\alpha\ Cos.\,\beta}{Sin.\,\lambda\cdot Sin.\,\alpha}.$$

Door $Cot.$ Z te differentieeren, alleen $\lambda$ latende veranderen, en $\delta\lambda = \delta\varphi$ te ſtellen, en vervolgens, in de uitkomst, $Sin.^2\,\lambda$ door de eerſte vergelijking te elimineren, vindt men ligtelijk:

$$\delta V = \tfrac{1}{2} R^2.\,\delta\varphi \left\{ Sin.^2\,\alpha\ Cos.\,\beta + Sin.\,\alpha\ Cos.\,\alpha\ Sin.\,\beta\ Cos.\,\lambda \right\}.$$

Vermenigvuldigt men deze uitdrukking met $\frac{m}{M} = \frac{\delta\lambda}{2\pi}$, en neemt er dan de integraal van tusſchen de grenzen o en $2\pi$, ten opzigte van de veranderlijke grootheid $\lambda$, dan komt

$$\frac{\Sigma m \delta V}{M} = \frac{\delta Q^\circ}{\delta\varphi}\,.\,\delta\varphi = \tfrac{1}{2}\delta\varphi \left\{ R^2\, Sin.^2\,\alpha\ Cos.\,\beta \right\},$$

of

$$\frac{\delta Q^\circ}{\delta\varphi}\,.\,\delta\varphi = \tfrac{1}{2} r^2\ Cos\ \beta\,.\,\delta\varphi.$$

Dit is het gedeelte van de ſom der projectiën op het horizontale vlak, dat ontſtaat uit de wenteling om de as A Z′, wanneer deze ſtil ſtaat.

Indien wij op dezelfde wijze de ſom der projectiën, *uit deze wenteling* ontſtaande, of van $\delta\varphi$ afhangende, zoeken op het vlak Z A K, dan is het ligt te zien, dat het reſultaat hetzelfde zijn zal, als wanneer wij in bovenſtaande uitdrukking $\beta$ of Z Z′ in $90^\circ - \beta$ of A′ Z′ veranderen. Wij zullen dus ook hebben

$$\frac{\delta Q'}{\delta \varphi} \cdot \delta \varphi = \tfrac{1}{2} r^2 \, Sin. \beta \cdot \delta \varphi.$$

Eindelijk, daar $\pi'$ in het vlak $ZA'$ zelve ligt, en dus de pool van dit vlak 90° van $Z'$ verwijderd is, zoo moet, om $\frac{\delta Q}{\delta \varphi} \cdot \delta \varphi$ te bekomen, in de uitdrukking $\frac{\delta Q^o}{\delta \varphi} \cdot \delta \varphi$, $\beta = 90^o$ ondersteld worden. Wij bekomen dus

$$\frac{\delta Q}{\delta \varphi} \cdot \delta \varphi = 0$$

Beschouwen wij nu eene verplaatsing van de as $AZ'$, zoodanig, dat $ZZ'$ of $\beta$ standvastig blijft.

In dit geval wordt de geheele cirkel als het ware over den bol verschoven, derwijze, dat voor elk punt P de verandering van den hoek Z of $\delta Z$ dezelfde blijft, terwijl $PZ$ standvastig is. Wij hebben dus, $\delta Z = \delta \psi$ stellende:

$$\delta V = \tfrac{1}{2} R^2 \, Sin.^2 PZ \cdot \delta \psi = \tfrac{1}{2} \delta \psi R^2 (1 - Cos.^2 PZ),$$

maar $Cos.\, PZ = - Cos.\, \lambda \; Sin.\, \beta \; Sin.\, \alpha + Cos.\, \beta \; Cos.\, \alpha$;

$$\text{dus } \delta V = \tfrac{1}{2} \delta \psi R^2 \left\{ 1 - Cos.^2 \alpha \, Cos.^2 \beta - Sin.^2 \alpha \, Sin.^2 \beta \, Cos.^2 \lambda \right.$$
$$\left. + 2 \, Sin.\, \alpha \, Cos.\, \alpha \, Sin.\, \beta \, Cos.\, \beta \, Cos.\, \lambda \right\}.$$

Vermenigvuldigt men weder deze uitdrukking met $\frac{m}{M} = \frac{\delta \lambda}{2\pi}$, en neemt er de integraal van tusschen de grenzen 0 en $2\pi$, ten opzigte van $\lambda$, zoo komt

$$\frac{\Sigma m \delta V}{M} = \frac{\delta Q^o}{\delta \psi} \cdot \delta \psi = \tfrac{1}{2} \delta \psi R^2 \left\{ 1 - Cos.^2 \alpha \, Cos.^2 \beta \right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{2} Sin.^2 \alpha \, Sin.^2 \beta \right\};$$

$$\text{dat is: } \frac{\delta Q^o}{\delta \psi} \delta V = \tfrac{1}{2} \delta \psi \left\{ a^2 + r^2 - a^2 Cos.^2 \beta - \tfrac{1}{2} r^2 \, Sin.^2 \beta \right\}$$
$$= \tfrac{1}{2} \delta \psi \left\{ r^2 + (a^2 - \tfrac{1}{2} r^2) \, Sin.^2 \beta \right\}.$$

De som der projectiën op het vlak $ZAK$, voortkomende uit de verplaatsing van de as des tols, in een kegelvlak om de lijn $AZ$ (Fig.

(Fig. 1), kan uit de laatstgevondene uitdrukking niet worden afgeleid, omdat in de formule (Zie Fig. 5)

$$\frac{\delta\left(\frac{\delta Q'}{\delta \psi}\right)}{\delta \lambda} \cdot \delta \lambda = - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\delta \lambda}{2\pi} \cdot R^2 \, Sin.^2 \, A'P \cdot \frac{\delta A'}{\delta \psi}$$

$\frac{\delta A'}{\delta \psi}$ voor ieder punt P verschillend, en dus *niet* standvastig is. (NB. Het teeken — is voor het tweede lid gesteld, omdat op het vlak Z K de perken positief zijn gerekend in de rigting van $q'$ naar $q$) Maar wij hebben

$$Tang. \, A' = Tang. \, Z P \, . \, Sin. \, Z,$$

Waaruit, P Z standvastig zijnde,

$$\delta A' = Tang. \, Z P \, . \, Cos.^2 \, A' \, . \, Cos. \, Z \, . \, \delta \psi,$$

maar $Cos. \, Z \, . \, Tang. \, Z P \, . \, Cos. \, A' = Cot. \, A' P;$

dus $\delta A' = Cos. \, A' \, Cot. \, A' P \, . \, \delta \psi,$

en $\delta A' \, . \, Sin.^2 \, A' P = Cos. \, A' \, Sin. \, A' P \, . \, Cos. \, A' P \, . \, \delta \psi$

$$= Cos. \, Z P \, . \, Cos. \, A' P \, . \, \delta \psi;$$

dus $$\frac{\delta\left(\frac{\delta Q'}{\delta \psi}\right)}{\delta \lambda} \cdot \delta \lambda = - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\delta \lambda}{2\pi} \cdot R^2 \, . \, Cos. \, Z P \, . \, Cos. \, A' P.$$

Wederom $Cos. \, A' P = Cos. \, \lambda \, Sin. \, \alpha \, Cos. \, \beta + Cos. \, \alpha \, Sin. \, \beta,$

$Cos \; Z P = - Cos. \, \lambda \, Sin. \, \alpha \, Sin. \, \beta + Cos. \, \alpha \, Cos. \, \beta;$

dus

$$\frac{\delta\left(\frac{\delta Q'}{\delta \psi}\right)}{\delta \lambda} \cdot \delta \lambda = - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\delta \lambda}{2\pi} \cdot R^2 (Cos.^2 \alpha - Sin.^2 \alpha \, Cos.^2 \lambda) \, Sin \, \beta \, Cos. \, \beta,$$

$$- \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\delta \lambda}{2\pi} \cdot R^2 (Cos.^2 \beta - Sin.^2 \beta) \, Sin. \, \alpha \, Cos. \, \alpha \, Cos. \, \lambda.$$

Nemende weder de som van alle dergelijke uitdrukkingen, van $\lambda = 0$ tot $\lambda = 2\pi$, komt

$$\frac{\delta Q'}{\delta \psi} = - \tfrac{1}{2} R^2 (Cos.^2 \alpha - \tfrac{1}{2} Sin.^2 \alpha) \, Sin. \, \beta \, Cos. \, \beta,$$

of $$\frac{\delta Q'}{\delta \psi} \, \delta \psi = - \tfrac{1}{2} (a^2 - \tfrac{1}{4} r^2) \, Sin. \, \beta \, Cos. \, \beta \, \delta \psi.$$

Eindelijk, wat de som der projectiën op het vlak Z A′ betreft, wanneer de as des tols, behoudens dezelfde helling tot het horizon-

zontale vlak, verplaatst wordt, zoo is het ligt te zien, dat deze som *nul* moet zijn, omdat, bij de bedoelde verplaatsing des cirkels, even zoo vele perken van gelijke grootte, op het vlak Z A′ naar *eene* als naar eene *tegengestelde* rigting toenemen. Wij hebben dus

$$\frac{\delta Q}{\delta \psi}\,\delta\psi = 0.$$

Met betrekking tot eene beweging der as A Z′ in het vertikale vlak Z A′, — welke ons nog te overwegen overblijft, — waarbij $\beta$ in $\beta + \delta\beta$ verandert, heeft men, om dezelfde rede als de laatstvermelde, te weten, dat er even zoo vele positieve als negatieve perken ontstaan:

$$\frac{\delta Q^{\circ}}{\delta\beta}\,\delta\beta = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\delta Q'}{\delta\beta}\,\delta\beta = 0.$$

Om nu nog $\frac{\delta Q}{\delta\beta}$ te vinden, zoo laat uit P een loodregte boog op Z A′ nedergelaten worden $= l$, dan is weder:

$$\frac{\delta\left(\frac{\delta Q}{\delta\beta}\right)}{\delta\lambda}\,.\,\delta\lambda = \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\delta\lambda}{2\pi}\,.\,R^2\,Cos.^2\,l,$$

$$= \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{\delta\lambda}{2\pi}\,R^2\,(1 - Sin.^2\,l),$$

$$= \tfrac{1}{2}\;\frac{\delta\lambda}{2\pi}\,.\,R^2\,(1 - Sin.^2\,\alpha\;Sin.^2\,\lambda).$$

En dus, integrerende tusschen de grenzen o en $2\pi$,

$$\frac{\delta Q}{\delta\beta}\,.\,\delta\beta = \tfrac{1}{2}\,\delta\beta\,.\,(R^2 - \tfrac{1}{2}R^2\,Sin.^2\,\alpha),$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(a^2 + \tfrac{1}{2}r^2)\,.\,\delta\beta$$

(NB. $\frac{\delta Q}{\delta\beta}$ moet hier positief zijn, omdat, in overeenstemming met de Figuur 1, als $\beta$ toeneemt, de ordinaten Z, boven de lijn A Y, ook toenemen.)

Door de bijeenvoeging der afzonderlijk gevonden gedeeltelijke differentialen voor $\varphi$, $\psi$ en $\beta$, vindt men weder de vergelijkingen (12).

§ 7.

## § 7.

De waarde van $U = a \, Sin. \beta$ en van $\partial Q$ uit (12) in de tweede vergelijking (11) gesteld zijnde, geeft

$$\partial \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q'}{\partial t}\right)^2 \right\} = g \,.\, a \,.\, \frac{a^2 + \frac{1}{2} r^2}{2} \,.\, Sin.\, \beta . \partial \beta.$$

Waaruit, integrerende

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q'}{\partial t}\right)^2 = \tfrac{1}{2} g \,.\, a \,(a^2 + \tfrac{1}{2} r^2)\,(B - Cos.\,\beta).$$

Zijnde B eene nieuwe toegevoegde standvastige grootheid. Wij hebben dus, deelende door $\frac{1}{4}\,(a^2 + \frac{1}{2} r^2)^2$:

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)^2 = 2g \,.\, \frac{a}{a^2 + \frac{1}{2} r^2} \,.\, (B - Cos.\beta) - \frac{4}{(a^2 + \frac{1}{2} r^2)^2} \,.\, \left(\frac{\partial Q'}{\partial t}\right)^2 \quad (13).$$

Dit is de tweede geïntegreerde vergelijking van de beweging des tols.

Stellende nu, eenvoudigheidshalve, $u = 2 \left(\frac{\partial Q'}{\partial t}\right)$, dan komt: 1°. volgens de eerste vergelijkingen (11) en (12), 2°. volgens de derde vergelijking (12), en 3°. volgens de derde vergelijking (11) en de tweede vergelijking (12):

$$A = r^2 \, Cos\; \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \left\{ r^2 + (a^2 - \tfrac{1}{2} r^2)\, Sin.^2 \beta \right\} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right),$$

$$u = r^2 \, Sin.\, \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) - (a^2 - \tfrac{1}{2} r^2)\, Sin.\, \beta \; Cos.\, \beta \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right),$$

$$\partial u = (a^2 + \tfrac{1}{2} r^2) \,.\, \left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right) \,.\, \partial \psi.$$

Hieruit volgt:

$$A \, Sin.\, \beta - u \, Cos.\, \beta = (a^2 + \tfrac{1}{2} r^2)\, Sin.\, \beta \,.\, \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right),$$

maar $$(a^2 + \tfrac{1}{2} r^2) \,.\, \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \beta};$$

dus $$A \, Sin.\, \beta - u \, Cos.\, \beta = Sin.\, \beta \,.\, \frac{\partial u}{\partial \beta}$$

en $$A \, Sin.\, \beta \, \partial \beta = u \, Cos.\, \beta \, \partial \beta + Sin.\, \beta \, \partial u$$
$$= \partial \left\{ u \, Sin.\, \beta \right\}.$$

Integrerende, komt

$$-\mathrm{A}\,Cos.\beta + \mathrm{C} = u\,Sin\,\beta,$$

of

$$u = \frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}\,Cos.\beta}{Sin.\beta},$$

dat is

$$\frac{\partial Q'}{\partial t} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{C} - \mathrm{A}\,Cos.\beta}{Sin.\beta} \quad \ldots \quad (14).$$

Dit is de derde geïntegreerde vergelijking, waarvan C de toegevoegde standvastige grootheid voorstelt.

Uit (14) en de waarde van $\partial u$ volgt nu

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{a^2+\frac{1}{2}r^2}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) = \frac{1}{a^2+\frac{1}{2}r^2}\cdot\frac{\partial\left\{\frac{\mathrm{C}-\mathrm{A}\,Cos.\beta}{Sin.\beta}\right\}}{\partial\beta}$$

$$= \frac{1}{a^2+\frac{1}{2}r^2}\cdot\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}\,Cos.\beta}{Sin.^2\beta};$$

en verder, volgens de uitdrukking die aan A gelijk is:

$$r^2\,Cos.\beta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \mathrm{A} - \left\{r^2 + (a^2-\tfrac{1}{2}r^2)\,Sin.^2\beta\right\}\cdot\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}\,Cos.\beta}{(a^2+\frac{1}{2}r^2)\,Sin.^2\beta}$$

$$= \mathrm{A}\cdot\frac{r^2\,Sin.^2\beta - r^2}{(a^2+\frac{1}{2}r^2)\,Sin.^2\beta} + \frac{r^2+(a^2-\frac{1}{2}r^2)\,Sin.^2\beta}{(a^2+\frac{1}{2}r^2)\,Sin.^2\beta}\times\mathrm{C}\,.\,Cos.\beta;$$

dus

$$r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \frac{\mathrm{C}\,.\left\{r^2+(a^2-\frac{1}{2}r^2)\,Sin.^2\beta\right\} - \mathrm{A}\,.\,r^2\,Cos.\beta}{(a^2+\frac{1}{2}r^2)\,Sin.^2\beta}$$

$$= \mathrm{C} + \frac{r^2}{a^2+\frac{1}{2}r^2}\cdot\frac{\mathrm{C}\,Cos.\beta - \mathrm{A}}{Sin.^2\beta}\,.\,Cos.\beta.$$

Wij hebben alzoo, de gevonden formulen verzamelende, en voor $\left(\frac{\partial Q'}{\partial t}\right)$ in (13) zijne waarde uit (14) schrijvende:

$$\left.\begin{aligned}
r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= \mathrm{C} - \frac{r^2}{a^2+\frac{1}{2}r^2}\cdot\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}\,Cos.\beta}{Sin.^2\beta}\cdot Cos.\beta,\\
\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) &= \frac{1}{a^2+\frac{1}{2}r^2}\cdot\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}\,Cos.\beta}{Sin.^2\beta},\\
\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2 &= 2g\cdot\frac{a}{a^2+\frac{1}{2}r^2}\cdot(\mathrm{B}-Cos.\beta) - \frac{(\mathrm{C}-\mathrm{A}\,Cos.\beta)^2}{(a^2+\frac{1}{2}r^2)^2\,Sin.^2\beta}
\end{aligned}\right\}(15).$$

Deze drie formulen geven de drie snelheden van beweging in functie van den hoek $\beta$ van de as des tols met de vertikale lijn, en van drie toegevoegde standvastige grootheden. Om volkomen de

de ſtelling van den tol te kunnen aanwijzen, worden er nog drie integratiën gevorderd, waarbij dan ook nog drie nieuwe ſtandvastige grootheden ingevoerd moeten worden. De laatſte vergelijking geeft $\beta$ in functie van den tijd, en daarna worden dan ook $\varphi$ en $\psi$ in functie van den tijd gevonden.

## § 8.

De gevondene vergelijkingen zijn reeds volkomen voldoende, om van de natuur der beweging eens tols een denkbeeld te geven, waarna eene benaderende integratie dier vergelijkingen gemakkelijk zal vallen. Om dit te doen zien, zullen wij eerst de waarde der ſtandvastige toegevoegde grootheden bepalen. Zij daartoe gegeven, dat op het oogenblik van het begin der beweging, als $t = 0$ aangenomen wordt, het volgende plaats heeft:

1°. De wentelende beweging om de as A $Z'$ . . $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = p$.

2°. De hoekſnelheid van de projectie der as A $Z'$ op het horizontale vlak . . . . . . . . $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) = 0$.

3°. De hoekſnelheid der as in eene vertikale rigting . . . . . . . . . . . . . . . $\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right) = 0$.

4°. De waarde van de overhelling $\beta$ der as . . . . . $= \beta'$

Dan vindt men:

$$A = r^2 . p . Cos. \beta',$$

$$B = Cos. \beta' + \frac{r^4 p^2}{2 g a (a^2 + \frac{1}{2} r^2)} Sin.^2 \beta',$$

$$C = r^2 p.$$

Hierdoor veranderen de vergelijkingen (15) in:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= p \left\{1 - \frac{r^2}{a^2 + \frac{1}{2} r^2} \cdot \frac{Cos. \beta}{Sin.^2 \beta} (Cos. \beta' - Cos. \beta)\right\} \\
\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) &= p \cdot \frac{r^2}{a^2 + \frac{1}{2} r^2} \cdot \frac{Cos. \beta' - Cos. \beta}{Sin.^2 \beta} \\
\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2 &= p^2 . \frac{r^4}{(a^2 + \frac{1}{2} r^2)^2} \left\{2g . \frac{a (a^2 + \frac{1}{2} r^2)}{r^4 p^2} - \frac{Cos. \beta' - Cos. \beta}{Sin.^2 \beta}\right\} \\
&\qquad \times (Cos. \beta' - Cos. \beta)
\end{aligned}\right\} (16).$$

Men ziet uit de laatste vergelijking, dat, indien de aanvankelijke snelheid van draaijing $p = 0$ ware, dan de beweging des tols volkomen die van eenen slinger zoude wezen; terwijl er dan ook geene wenteling van de as zoude kunnen ontstaan, omdat $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ en $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ standvastig $= 0$ zouden blijven.

De beweging van den tol zoude evenzoo die van eenen slinger zijn, als $r = 0$ was, dat is, wanneer de geheele massa in de as zoude vereenigd wezen. De vallende en slingerende beweging konde dan echter gepaard gaan met eene standvastige wenteling van het oneindig dunne ligchaam om de as.

Wanneer noch $p$ noch $r$ gelijk *nul* is, maar vooral wanneer beide, of één van beide, aanmerkelijke waarden bekomen, dan moet $\beta$ binnen kleine grenzen besloten blijven; want, daar het eerste lid der laatste vergelijking een kwadraat is, zoo moet het tweede lid steeds positief blijven, en hieruit volgen deze voorwaarden, te weten:

$$Cos.\,\beta < Cos.\,\beta'$$

en

$$Cos.\,\beta > Cos.\,\beta' - 2g \, . \, \frac{a(a^2 + \frac{1}{2} r^2)}{r^4 p^2} \, Sin.^2 \beta.$$

Is nu $p$, de aanvankelijke snelheid van draaijen, gelijk dit bij het tollen het geval is, zeer groot, zoo is ook $\beta$ binnen kleine grenzen besloten. De as des tols kan dus wel een weinig tot den grond neigen, maar de overhelling kan niet voortdurende vermeerderen.

Daar voorts $Cos.\,\beta' - Cos.\,\beta$ positief moet blijven, zoo is ook altijd $\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)$ positief. De lijn AK, evenwijdig aan de doorsnijding van het vlak BCD met het horizontale vlak, verplaatst zich dus, bij den tol, in *dezelfde* rigting, als de rigting der wenteling om de as.

Na den aanvang der beweging, wanneer $\frac{\partial \beta}{\partial t} = 0$ was, begint dus de as naar het horizontale vlak te neigen, en wel met eene toenemende snelheid; tegelijk bekomt $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ eene waarde, en neemt ook toe, dat is, de as AZ' begint om de vertikale lijn AZ rond te

te draaijen. Spoedig bereikt nu $\frac{\delta \beta}{\delta t}$ zijne grootste waarde en begint daarna te verminderen, en eindelijk $=o$ te worden, juist op het oogenblik, als de snelheid $\frac{\delta \psi}{\delta t}$ hare grootste waarde bereikt heeft. De as is dan zoo ver gedaald, als zij dalen kan, en, in stede van verder te vallen, beweegt zij zich met de grootste snelheid, die zij kan aannemen, in eene horizontale rigting voort. Deze horizontale snelheid begint dadelijk daarop te verminderen, de as begint weder te rijzen, en klimt tot de hoogte, van waar zij gekomen is. Deze hoogte bereikt zij op het oogenblik, als $\frac{\delta \psi}{\delta t}$ weder *nul* wordt, waarna dezelfde bewegingen, in dezelfde volgorde, zich weder herhalen. Deze bewegingen der as zijn afgebeeld in Fig. 6.

Stellen wij nu $a$ negatief, dat heet, nemen wij aan, dat het steunpunt *boven* het zwaartepunt gelegen is, dan kan $\left(\frac{\delta \beta}{\delta t}\right)^2$ volgender wijze geschreven worden, te weten:

$$\left(\frac{\delta \beta}{\delta t}\right)^2 = \frac{p^2 r^4}{(a^2+\frac{1}{2}r^2)^2}\left\{2g \cdot \frac{a(a^2+\frac{1}{2}r^2)}{r^4 p^2} - \frac{Cos.\beta - Cos.\beta'}{Sin.^2 \beta}\right\} \times (Cos.\beta - Cos.\beta').$$

Hieruit volgt, dat wij nu moeten hebben:

$$Cos.\beta > Cos.\beta',$$

$$Cos.\beta < Cos.\beta' + 2g \cdot \frac{a(a^2+\frac{1}{2}r^2)}{r^4 p^2}\, Sin.^2 \beta.$$

De as blijft nu altijd hooger dan in den eersten stand, bij den aanvang der beweging; maar kan zich toch niet verder dan slechts eene geringe hoeveelheid opheffen. Te gelijk evenwel is $\frac{\delta \psi}{\delta t}$ negatief geworden, en de lijn van doorsnijding van het vlak B C D met het horizontale vlak, of de lijn der knoopen, beweegt zich *teruggaande*. Overigens zijn de omstandigheden der beweging volkomen dezelfde, als in het eerste geval. Een punt der as, boven het steunpunt, doorloopt nu eene opvolgende reeks kromme lijnen, als in Fig. 7 is voorgesteld.

Was $a = o$, dat heet, was het steunpunt in het zwaarte-middel-

 punt,

punt, dan kan aan de laatfte der vergelijkingen (16) niet voldaan worden, zonder $\beta = \beta'$ te nemen. De as behoudt alsdan eene ftandvastige ftelling, tegelijk dat ook de lijn der knoopen in eene onveranderde rigting blijft, want nu is ook $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$.

Men kan zelfs $\beta' = 90^\circ$ nemen, zonder dat daarom de tol zal vallen; want ftellende dan $\beta = \beta' + \alpha = 90^\circ + \alpha$, komt

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = p\left\{1 + \frac{r^2}{a^2 + \frac{1}{2} r^2} \, Tang.^2 \, \alpha\right\},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = p \cdot \frac{r^2}{a^2 + \frac{1}{2} r^2} \cdot \frac{Tang. \, \alpha}{Cos. \, \alpha},$$

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}\right)^2 = \frac{r^4 p^2}{(a^2 + \frac{1}{2} r^2)^2} \cdot \left\{2g \cdot \frac{a(a^2 + \frac{1}{2} r^2)}{r^4 p^2} - \frac{Sin. \, \alpha}{Cos.^2 \, \alpha}\right\} Sin. \, \alpha.$$

Zij, kortheidshalve, $2g \cdot \frac{a(a^2 + \frac{1}{2} r^2)}{r^4 p^2} = \delta =$ een *klein getal*, dan moet

$$\delta > \frac{Sin. \, \alpha}{1 - Sin.^2 \, \alpha},$$

of

$$1 > \left(Sin. \, \alpha + \frac{1}{\delta}\right) Sin \, \alpha$$

zijn.

Daar nu $\frac{1}{\delta}$ een *groot* getal is, moet ook $\alpha$ fteeds *klein* blijven, en dus kan de as des tols ook maar weinig van de horizontale rigting afwijken.

Zoo dus B (Fig. 8) een ligchaam is, dat om de as A B fnel rondwentelt, dan zal die as, alleen bij A onderfteund wordende, toch niet veel van den horizontalen ftand afwijken. Daar voorts $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ in dit geval pofitief blijft, zal de lijn der knoopen voortgaan zich in de rigting van het pijltje M te bewegen, dat is, die beweging zal *regtftreeks* zijn, indien men aldus de rigting noemt, welke de beweging van het ligchaam B zoude volgen, zoo men onderftelt, dat de as A B opgeheven en vertikaal gefteld werd. Onderftelt men echter het ligchaam B onder het fteunpunt, en dus $\beta' > 90^\circ$, dan loopen werkelijk de bewegingen van het ligchaam en van de lijn der knoopen in tegengeftelde rigting, fchoon $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ pofitief blijft.

§ 9.

## § 9.

Gaan wij thans over tot eene benaderende integratie der formulen (16). Alzoo $\beta$ en $\beta'$ steeds zeer weinig verschillen, zoo zij $\beta = \beta' + \rho$, dan is $\rho$ een kleine boog, waarvan wij echter vooreerst nog de tweede magt dienen in aanmerking te nemen, maar de hoogere magten kunnen verwaarloozen. Alzoo is

$$Cos.\beta' - Cos.\beta = \rho\, Sin.\beta' + \tfrac{1}{2}\rho^2\, Cos.\beta'$$

en
$$\left(\frac{Cos.\beta' - Cos.\beta}{Sin.\beta}\right)^2 = \rho^2;$$

dus wordt

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2 = \frac{r^4 p^2}{(a^2+\frac{1}{2}r^2)^2}\left\{\delta.\rho\, Sin.\beta' + \tfrac{1}{2}\delta\rho^2\, Cos.\beta' - \rho^2\right\},$$

$$= \frac{r^4 p^2}{(a^2+\frac{1}{2}r^2)^2}\left\{(\delta Sin.\beta')\rho - (1 - \tfrac{1}{2}\delta Cos.\beta')\rho^2\right\},$$

gemakshalve, $= n\rho - i^2\rho^2$.

Hieruit volgt: $\partial t = \dfrac{\partial\rho}{\sqrt{n\rho - i^2\rho^2}}$,

en
$$\rho = \frac{n}{2i^2}\left\{1 - Cos.(it + c)\right\};$$

$c$ is de toegevoegde standvastige grootheid.

Wij bekomen alzoo, stellende

$$\delta = 2g \cdot \frac{a(a^2+\frac{1}{2}r^2)}{r^4 p^2} \text{ en } i = p \cdot \frac{r^2}{a^2+\frac{1}{2}r^2}\sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\delta Cos.\beta'},$$

$$\rho = \frac{\delta Sin.\beta'}{2 - \delta Cos.\beta'}\left\{1 - Cos.(it + c)\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17).$$

Men ziet uit deze uitdrukking, dat de dalende en rijzende beweging der as in eene vertikale rigting, zeer na overeenstemt met die van eenen slinger. De tijd, waarin eene volle slingering, — eene daling van den hoogsten stand en eene daaropvolgende rijzing, — wordt volbragt is de tijd, waarin $it$ met 360° toeneemt. Als T dezen tijd voorstelt, zoo is

$$i\mathrm{T} = 2\pi,$$

en

en $$T = \frac{2\pi}{i} = \frac{\pi}{p} \cdot \frac{r^2 + 2a^2}{r^2 \sqrt{1 - \frac{1}{2}\delta \, Cos.\beta'}}$$

$$= \frac{\pi}{p}\left(1 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^2\right) \text{ nabij;}$$

$\frac{\pi}{p}$ is de tijd eener *halve* omwenteling van den tol om zijne as, met de aanvankelijke snelheid $p$. Dus blijkt, dat de tijd, waarin de as A Z′ zakt en weder rijst, grooter is dan de duur eener halve wenteling, en wel te grooter, naar gelang $\frac{a}{r}$ grooter is. Daar voorts $\delta$ met $a$ toeneemt, zoo ziet men, dat voor tollen die hoog zijn, de dalende en rijzende beweging der as zoowel uitgebreider als langzamer zijn zal, dan voor lage tollen. Verder ziet men, dat met de afneming van $p$ en de toeneming van $\beta$, de slingeringen der as grooter worden; iets dat, vóór het nedervallen der tollen, zeer merkbaar wordt aan de waggelende beweging, die zij dan aannemen.

Thans verder de waarde van $\delta^2$ en $\rho^2$ verwaarloozende, hebben wij
$$\rho = \tfrac{1}{2}\delta \, Sin.\beta' \left(1 - Cos.(i\,t + c)\right)$$

en $$\frac{Cos.\beta' - Cos.\beta}{Sin.^2\beta} = \frac{Cos.\beta' - Cos.\beta}{Sin.^2(\beta' + \rho)} = \frac{\rho \, Sin.\beta'}{Sin.^2\beta'} = \frac{\rho}{Sin.\beta'}$$
$$= \tfrac{1}{2}\delta\left(1 - Cos.(i\,t + c)\right);$$

dus wordt $$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \tfrac{1}{2}\delta p \cdot \frac{r^2}{a^2 + \frac{1}{2}r^2}\left(1 - Cos.(i\,t + c)\right).$$

Waaruit, integrerende:

$$\psi = \tfrac{1}{2}\delta \cdot \frac{p\,r^2}{a^2 + \frac{1}{2}r^2}\left(t - \frac{1}{i}\,Sin.(i\,t + c)\right) + Const.$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\delta}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\delta \, Cos.\beta'}}\left\{i\,t - Sin.(i\,t + c)\right\} + Const.$$

$$= \tfrac{1}{2}\delta \cdot \left\{i\,t - Sin.(i\,t + c)\right\} + Const. \quad \ldots \quad (18).$$

Deze formule geeft den stand van de lijn der knoopen voor ieder bepaald oogenblik. Men ziet, dat de *gemiddelde* voortgang in den tijd $(t' - t)$ gevonden wordt door de uitdrukking

$\psi' - \psi$

$$\psi' - \psi = \tfrac{1}{2}\delta . i(t'-t) = g . \frac{a}{r^2 p}(t'-t).$$

De knoopen-lijn verplaatst zich dus langzamer, wanneer de *snelheid van wenteling* grooter wordt. Eene geheele omwenteling dezer lijn wordt gevonden door $\psi' - \psi = 2\pi$ te stellen, en daaruit $(t'-t)$ te berekenen. Zij deze tijd $= T'$, dan is

$$T' = 2\pi . \frac{r^2 p}{a g} = \frac{4\pi^2}{2\left(\frac{\pi}{p}\right)} . \frac{r}{a} . \frac{r}{g}.$$

Laat $\tau = 2\frac{\pi}{p}$ de tijd eener omwenteling des tols om zijne as, met de snelheid $p$, zijn, dan is nog

$$T' = \frac{4\pi^2}{\tau} . \frac{r}{a} . \frac{r}{g}.$$

Het is opmerkelijk, dat in deze eerste benadering van $T'$, $\beta$ niet voorkomt. Hieruit volgt, dat de tijd van wenteling der knoopen-lijn bijna onafhankelijk van de overhelling $\beta$ der as is.

Wij kunnen thans de natuur der kromme lijnen Fig. 6 en 7, door eenig punt der as A Z′ beschreven, nader leeren kennen. Stellen wij daartoe, eenvoudigheidshalve, de constanten in de vergelijkingen (17) en (18) gelijk *nul*, dan komt, $\delta^2$ verwaarloozende,

$$\rho = \tfrac{1}{2}\delta \, Sin.\,\beta' \,(1 - Cos.\,i t),$$
$$\psi = \tfrac{1}{2}\delta \,(i t - Sin.\,i t).$$

De boog $\psi$, door de knoopen-lijn beschreven, is nu blijkbaar gelijk aan de verandering in Azimuth van de as des tols A $Z'$, dat is, aan den boog door het punt A′ (Fig. 5) doorloopen. Dus beschrijft het punt $Z'$ in den tijd $t$ den boog van eenen parallel-cirkel, uitgedrukt door $= \psi\, Sin.\,\beta'$. Zij nu (Fig. 6) A P $= x$ en P $Z' = y$, dan heeft men

$$x = \psi\, Sin.\,\beta', \quad y = \rho;$$

dus

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\delta\, Sin.\,\beta'\,(i t + Sin.\,i t),\\ y &= \tfrac{1}{2}\delta\, Sin.\,\beta'\,(1 - Cos.\,i t) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (19).$$

Hieruit volgt, dat de kromme A $Z'$ (Fig. 6) zeer nabij de gewone cycloide is, beschreven op de oppervlakte van eenen bol, zijnde $\tfrac{1}{2}\delta\, Sin.\,\beta'$ de radius van den beschrijvenden cirkel dezer cycloide, als de radius des bols 1 is.

Wan-

Wanneer $\alpha$ kleiner wordt, vermindert ook $\delta$; dus worden dan de cycloiden kleiner. Voor $\alpha = 0$, dat is, wanneer het steunpunt met het zwaarte-middelpunt overeenstemt, is ook $\delta = 0$, en de cycloiden zijn tot één punt ingekrompen. Wordt verder $\alpha$ negatief, dan komen de cycloiden weder te voorschijn, maar zij zijn anders om gekeerd. Het is op deze wijze, dat Fig. 6 in Fig. 7 overgaat.

Wanneer de snelheid van wenteling $p$ grooter wordt, vermindert ook $\delta$; dan worden de cycloiden mede kleiner; maar zij kunnen zich nimmer tot één punt herleiden, noch omgekeerd worden.

Eindelijk wanneer $\beta'$ afneemt, dat is, als de tol regtstandiger staat, worden nogmaals de cycloiden kleiner; maar zij vergrooten, als $\beta$ toeneemt, en zijn op het grootst, als $\beta = 90°$ is, dat is, wanneer de as des tols zeer nabij horizontaal is, en zeer nabij horizontaal blijft.

Tot de volkomen integratie der formulen (16) behoort nu nog, dat wij $\varphi$ ook in functie van den tijd uitdrukken, hetgeen, binnen dezelfde grenzen van benadering, geene zwarigheid meer kan geven. Wij merken echter op, dat de hoek $\varphi$ niet de geheele hoeveelheid der wenteling uitdrukt, omdat de oorsprong van dien hoek, de lijn der knoopen geene standvastige rigting behoudt. Indien $\varphi$ standvastig was, en alleen $\psi$ veranderde, dan zoude de lijn B K′ de oppervlakte des tols steeds in hetzelfde punt doorsnijden, en dat punt zoude mitsdien om de as A Z′ wentelen. Met andere woorden: Eene lijn, getrokken uit B (Fig. 1) naar eenig bepaald punt P van den omtrek C D, zoude, door de verandering van $\psi$ alleen, achtervolgende naar verschillende punten van de ruimte gerigt zijn.

Laat (Fig. 11) op zeker oogenblik K′ en P de punten zijn, waar de lijnen B K′ en B P (Fig. 1) de oppervlakte van eenen om B beschreven bol ontmoeten; K″ en P′ de punten, waar deze ontmoeting in een volgend oogenblik plaats heeft. Zij uit K′ het loodlijntje K′ K‴ nedergelaten, dan is K‴ P′ — K′ P de weg, dien het punt P, wentelende om de as A Z′, in den tijd $dt$ heeft afgelegd. Nu is

$$K'P = \varphi,\ K''P' = \varphi + \partial\varphi,\ K'K'' = \partial\psi,\ \angle PK'Q = \beta,$$
en $$K''K''' = \partial\psi\ Cos.\beta;$$

dus

dus wordt

$$K''' P' - K'P = K'' P' - K' P + K''' K' = \delta\varphi + \delta\psi \, Cos.\beta.$$

De hoegrootheid van de wenteling in een' bepaalden tijd is dus gelijk aan de integraal dezer laatste uitdrukking, dat is, aan $\int \{\delta\varphi + \delta\psi \, Cos.\beta\}$.

Uit de beide eerste vergelijkingen (16) volgt:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta t} + \frac{\delta\psi}{\delta t} Cos.\beta = p,$$

of

$$\delta\varphi + \delta\psi \, Cos.\beta = p\,\delta t.$$

Alzoo, integrerende,

$$\varphi' - \varphi + \int \delta\psi \, Cos.\beta = p\,(t' - t) \quad . \quad . \quad (20).$$

Hieruit volgt, dat de snelheid van draaijing van den tol om zijne as standvastig is.

Hiermede zijn nu de formulen (16) geheel geïntegreerd, en kan dus het voorstel omtrent de beweging eens tols om deszelfs punt als opgelost beschouwd worden.

## § 10.

Geven wij thans een enkel voorbeeld in getallen.

Zij $a = 2$ en $r = 1$ decimeter, $\frac{1}{2} g = 49{,}025$ decim., de tijd eener geheele omwenteling $= 0'',01 = \tau$,

dan is

$$p = \frac{2\pi}{\tau} = 628{,}32,$$

$$\delta = \tfrac{1}{2} g \cdot \frac{\tau^2}{\pi^2} \cdot \frac{a(a^2 + \frac{1}{2} r^2)}{r^4} = 0{,}00447 = 15'\,22'' \text{ in boog},$$

$$i = \frac{2\pi}{\tau} \cdot \frac{r^2}{a^2 + \frac{1}{2} r^2} \text{ (nabij)} = 139{,}85.$$

Tijd, waarin eene daling en rijzing der as voorvalt, of eene cycloide beschreven wordt $= T = 0'',045$.

Tijd, waarin de lijn der knoopen vier regte hoeken of 360° doorloopt . . . . . . . $T' = 25''$ nabij

en $\beta = \beta' + \rho = \beta' + (7'\,41'')\,(1 - Cos.\,139{,}85\,t)\, Sin.\beta'$,

wanneer men namelijk de boogen in deelen van den straal, en den tijd in seconden uitdrukt;

of

of $\beta = \beta' + \rho = \beta' + (7' 41'') (1 - Cos\ 8000°.t)\ Sin.\beta'$,
wanneer de bogen in graden worden uitgedrukt.

Men ziet hieruit, dat bij eene snelheid van 100 omwentelingen in ééne seconde, de as des tols, zelfs in eenen horizontalen stand, langzaam genoeg voortgaat, om het ongewone schouwspel te vertoonen van een ligchaam, dat niet valt, offschoon het zwaartemiddelpunt niet ondersteund wordt, en waarbij men de oorzaak hiervan ook niet aan eene middelpuntvliedende kracht kan toeschrijven.

Al deze uitkomsten der theorie zijn op de vroeger vermelde Vergadering door proeven nader opgehelderd. Hiertoe diende (Fig. 9, 10 en 8) eene kleine houten as A Z', met eenen koperen punt, gaande door het midden van eenen blikken ring N, zoo als de figuren dat aanwijzen. Deze ring konde hooger en lager aan de as geschoven worden. Tot steunpunt diende, in Fig. 9 en 10, eene kleine uitholing, in de gedaante van een ondiep spherisch segment, boven in een dik koperen plaatje, dat door eene kleine houten kolom M A gedragen werd. In Fig. 8 rust de as, die van onderen voorzien is van een klein knopje, in eene kleine koperen vork; de ronde steel van deze vork steekt in de kolom M A, en kan daarin gemakkelijk ronddraaijen. In Fig. 9 is het zwaartepunt boven het steunpunt; in Fig. 8 is het juist of bijna in hetzelfde horizontale vlak als het steunpunt, en in Fig. 10 ligt het zwaartepunt onder het steunpunt. In de gevallen Fig. 9 en 10 is het voldoende, de wentelende beweging, op de bekende wijze, met de vingers mede te deelen; voor het geval Fig. 8 is het doelmatiger, daartoe eene koorde en een' sleutel, — b. v. zoo als die bij de gewone bromtollen gebruikt worden, — te bezigen, ten einde aan de wentelende beweging meerdere snelheid te geven.

De pijltjes, onder aan op het voetstuk gesteld, geven de rigting van de beweging van de lijn der knoopen te kennen, in overeenstemming met de rigting van de wentelende beweging, door de bovenste pijltjes aangewezen. Doet men de beide ringen, Fig. 9 en 10, gelijktijdig tollen, en beide in *dezelfde* rigting, dan is het onderscheid in de verplaatsing van de lijn der knoopen zeer in het oog vallende. Bij den toestel Fig. 10 kan ook het zwaartepunt in

in het steunpunt gebragt worden, als wanneer het vlak des rings N eene onveranderlijke stelling behoudt.

Wij hebben de beweging eens tols beschouwd, in de onderstelling, dat de punt A eene onveranderlijke stelling bleef behouden: dit echter is bij het gewone spel het geval niet; als wanneer die punt zich vrijelijk over een vlak kan bewegen. Wanneer wij ons voorstellen, dat de punt des tols op dit vlak *geene wrijving* ondervindt, dan gaan de gevondene formulen voor de beweging nog onveranderd door, slechts met dit verschil, dat nu niet meer de punt A, maar het zwaartepunt B het middelpunt der *horizontale* beweging wordt; terwijl het, in de vertikale rigting, daalt, en weder rijst. Heeft de tol, bij het nederwerpen, *geene voortgaande* beweging over het vlak bekomen, dan zal het zwaartepunt B (uitgenomen de kleine dalende en rijzende beweging) in rust blijven, terwijl de punt A op het vlak (uitgenomen eene kleine uit- en inschuiving) eenen cirkel beschrijft. Heeft daarentegen de tol ook eene voortgaande beweging bekomen, dan gaat het zwaartepunt, met eene gelijkmatige snelheid, in eene regte lijn voort, terwijl de punt A op het vlak krullen beschrijft. Wanneer er, — gelijk dit altijd plaats vindt, — wrijving op het vlak bestaat, dan worden natuurlijk de bewegingen gewijzigd. Deze wrijving kan, onder andere ten gevolge hebben, dat de as des tols, wanneer de overhelling β niet te groot is, zich geheel opheft, en vertikaal wordt: iets dat, blijkens het bewezene, anders nimmer kan gebeuren. Men neme hierbij in aanmerking, dat de punt eens gewonen tols geenszins een enkel punt is, maar een gebogen vlakje, en dat door de snelle draaijing dikwijls eene kleine uitholling in den grond ontstaat (*).

Wij zouden nu de overeenkomst kunnen aanwijzen, welke er tusschen de beweging eens tols en die der aarde om hare as bestaat,

(*) In de *Cours de Mathématiques*, par BEZOUT (*Suite de la 4e partie, application des Principes généraux de la Mécanique, à différents lois de mouvement et d'équilibre*), wordt zelfs het [schijnbaar] niet aan de wetten der zwaartekracht gehoorzamen van eenen tol, *geheel alleen* aan de wrijving op de punt toegeschreven. Het behoeft echter niet aangemerkt te worden, dat deze wijze van beschouwing *onjuist* is.

staat, hoe namelijk de aantrekking van de zon en de maan op de *afgeplatte* en dus *eenigermate schijfvormige* figuur der aarde, aan de as van wenteling dezer laatste noodwendig ook eene kegelvormige beweging moet mededeelen, waarvan de teruggang der evenachtspunten aan den hemel het gevolg is. Daar evenwel deze aanwijzing nog duidelijker kan zijn, na de behandeling van het voorstel omtrent de beweging eens kleinen rings, die door eenen grooteren wordt aangetrokken, zoo willen wij vooraf hiertoe overgaan.

## OVER DE WETTEN, VOLGENS WELKE EEN DRAAIJENDE RING, DIE DOOR EENEN GROOTEREN CONCENTRISCHEN VASTEN RING WORDT AANGETROKKEN, ZICH OM ZIJN MIDDELPUNT BEWEEGT.

### § 11.

Laat de ring C D P (Fig. 1) alleen om deszelfs middelpunt B beweeglijk zijn; en laat niet de zwaartekracht, maar de aantrekking van een' anderen ring, van grooter straal dan C D P, hebbende hetzelfde middelpunt B, en in een vlak, evenwijdig aan dat van X Y gelegen, de oorzaak zijn der krachten, die op D P C werken.

Zij Q P (Fig. 12) een gedeelte van den kleinen ring; K M een gedeelte van den grooten; M de massa van het punt M; $m$ die van het punt P; $x''$ en $y''$ de coördinaten van M, en weder X A K $= \psi$, K A X' $= \varphi$, P A Q $p = \theta$, P A X' $= \lambda$, A P $= r$, A M $=$ R; en laten P, P' en P'' de snelheden zijn, waarmede P evenwijdig van A X, A Y en A Z, door de aantrekking van den vastliggenden buitensten ring aangezet wordt te bewegen, dan zijn

$$m\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t} - \mathrm{P}\,\partial t\right),\ m\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \mathrm{P}'\,\partial t\right) \text{ en } m\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t} - \mathrm{P}''\,\partial t\right)$$

de krachten of drukkingen, die het punt P van het eene op het andere oogenblik ondervindt.

Nu

Nu moet weder de som der momenten om elk der drie assen $= o$ zijn, dat is:

$$\Sigma\left(m\frac{x\,\delta^2 y}{\delta t}-m\frac{y\,\delta^2 x}{\delta t}\right)-\Sigma\,m\,(\text{P}'\,x-\text{P}\,y)\,\delta t=o,$$

$$\Sigma\left(m\frac{x\,\delta^2 z}{\delta t}-m\frac{z\,\delta^2 x}{\delta t}\right)-\Sigma\,m\,(\text{P}''\,x-\text{P}\,z)\,\delta t=o,$$

$$\Sigma\left(m\frac{y\,\delta^2 z}{\delta t}-m\frac{z\,\delta^2 y}{\delta t}\right)-\Sigma\,m\,(\text{P}''\,y-\text{P}'\,z)\,\delta t=o,$$

of

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma\,m\,\dfrac{\delta\,(x\,\delta y-y\,\delta x)}{\delta t^2}=\Sigma\,m\,(\text{P}'\,x-\text{P}\,y),\\ \Sigma\,m\,\dfrac{\delta\,(x\,\delta z-z\,\delta x)}{\delta t^2}=\Sigma\,m\,(\text{P}''\,x-\text{P}\,z),\\ \Sigma\,m\,\dfrac{\delta\,(y\,\delta z-z\,\delta y)}{\delta t^2}=\Sigma\,m\,(\text{P}''\,y-\text{P}'\,z),\end{array}\right\}\quad\ldots\quad(21).$$

Verlengen wij de projectie A$p$ des voerstraals van het punt P tot aan den grooten ring in N, dan is het ligt in te zien, dat de resultante der aantrekking van alle punten M van dezen ring op het punt P, gelegen zal zijn in het vlak ANP, en wel, dat zij gerigt moet zijn van P naar eenig punt tusschen N en $p$. Zij K de snelheid, waarmede het punt P door deze resultante in eene horizontale rigting aangezet wordt te bewegen, dan zal

$$\text{P}=\text{K}\times\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

en

$$\text{P}'=\text{K}\times\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad\text{zijn;}$$

diensvolgens is weder

$$\text{P}'\,x-\text{P}\,y=o,$$

en dus

$$\Sigma\,m\,\frac{\delta(x\,\delta y-y\,\delta x)}{\delta t^2}=o\quad\ldots\quad(22),$$

even als bij den tol.

Zoeken wij nu P, P′ en P″ nader te bepalen.

Zij $\quad \text{PM}=s=\sqrt{(x''-x)^2+(y''-y)^2+(-z)^2}$,

dan is de kracht, waarmede P door M getrokken wordt, evenredig aan $\dfrac{\text{M}}{s^2}$.



De

De cosinussen der hoeken, welke PM met de assen maakt, zijn

$$\frac{x''-x}{s},\quad \frac{y''-y}{s},\quad \frac{-z}{s};$$

dus is, indien men de uitwerking van de aantrekking van M op $m$, evenwijdig aan de assen, voorstelt door $\delta P$, $\delta P'$, $\delta P''$, en $l$ een standvastig getal is:

$$\delta P = l.M.\frac{x''-x}{s^3},\ \delta P' = l.M.\frac{y''-y}{s^3},\ \delta P'' = l.M.\frac{-z}{s^3}.$$

Zij de hoek XAM $=\omega$, en E een standvastig getal, dan kan de massa M voorgesteld worden door $E.\delta\omega$, dus zullen wij hebben:

$$P = l.E.\int_0^{2\pi}.\frac{x''-x}{s^3}\delta\omega;\ P' = l.E.\int_0^{2\pi}.\frac{y''-y}{s^3}\delta\omega$$

$$P'' = -l.E\int_0^{2\pi}.\frac{z}{s^3}\delta\omega.$$

Of, omdat $x$, $y$, $z$ in deze integratie standvastig zijn:

$$P = l.E.\int_0^{2\pi}\frac{x''}{s^3}\delta\omega - l\,E\,x\int_0^{2\pi}\frac{\delta\omega}{s^3},$$

$$P' = l\,E\int_0^{2\pi}\frac{y''}{s^3}\delta\omega - l\,E\,y\int_0^{2\pi}\frac{\delta\omega}{s^3},$$

$$P'' = \qquad - l\,E\,z\int_0^{2\pi}.\frac{\delta\omega}{s^3}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dus is}\quad P''x - Pz = -l.E.z.\int_0^{2\pi}\frac{x''}{s^3}\delta\omega \\ \text{en}\quad P''y - P'z = -l.E.z.\int_0^{2\pi}\frac{y''}{s^3}\delta\omega\end{array}\right\}\quad .\ (23).$$

## § 12.

Nu heeft men:

$$s^2 = x^2+y^2+z^2+x''^2+y''^2-2(xx''+yy''),$$
$$= R^2+r^2-2(xx''+yy''),$$

$= R^2$

$$= R^2 + r^2 - 2\,R\,(x\,Cos.\,a + y\,Sin.\,a),$$
$$= (R^2 + r^2)\left(1 - 2\,.\,\frac{R}{R^2 + r^2}(x\,Cos.\,a + y\,Sin.\,a)\right);$$

dus is $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}\,.\left\{1 - 2\,\frac{\mu}{r}\,(x\,Cos.\,a + y\,Sin.\,a)\right\}^{-\frac{3}{2}}.$

Stellende, ter bekorting, $\mu = \frac{r\,R}{R^2 + r^2}$.

Wanneer R zeer groot is, in vergelijking tot $r$, dan is ook $\mu x$ of $\mu y$ eene kleine breuk; bijgevolg kan de grootheid onder het wortelteeken dan in eene convergerende reeks ontwikkeld worden; dus vinden wij:

$$\frac{y''}{s^3}\,\delta a = \frac{R\,.\,Sin.\,a}{s^3}\,\delta a$$
$$= \frac{R}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{1 + 3\,.\,\frac{\mu}{r}(x\,Cos.\,a + y\,Sin.\,a) + \frac{3\,.\,5}{1\,.\,2}\,.\,\frac{\mu^2}{r}(x\,Cos.\,a + y\,Sin.\,a)^2 + \frac{3\,.\,5\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{\mu^3}{r^3}(x\,Cos.\,a + y\,Sin.\,a)^3 + \&c.\right\}Sin.\,a\,\delta a,$$

$$\frac{x''}{s^3}\,\delta a = \frac{R\,Cos.\,a}{s^3}\,\delta a$$
$$= \frac{R}{(R^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}\left\{1 + 3\,\frac{\mu}{r}(x\,Cos.\,a + y\,Sin.\,a) + \frac{3\,.\,5}{1\,.\,2}\,.\,\frac{\mu^2}{r^2}(x\,Cos.\,a + y\,Sin.\,a)^2 + \frac{3\,.\,5\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{\mu^3}{r^3}(x\,Cos.\,a + y\,Sin.\,a)^3 + \&c.\right\}Cos.\,a\,\delta a.$$

Wij zullen alzoo de integralen van de uitdrukkingen, als:

$$(x\,Cos.\,a + y\,Sin.\,a)^m\,Sin.\,a\,\delta a,$$
$$(x\,Cos.\,a + y\,Sin.\,a)^m\,Cos.\,a\,\delta a$$

tusschen de grenzen o en $2\,\pi$ dienen te vinden.

Zij daartoe $x = r\,Cos.\,a'$ en $y = r\,Sin.\,a'$,

dan is $x\,Cos.\,a + y\,Sin.\,a = r\,Cos.\,(a - a')$;

maar $Sin.\,a = Sin.\,(a' + (a - a')) = Sin.\,a'\,Cos.\,(a - a') + Cos.\,a'\,Sin.\,(a - a')$.



Dus

Dus wordt:

$$(x\,Cos.\,\alpha + y\,Sin.\,\alpha)^m\,Sin.\,\alpha\,\partial\alpha$$
$$= r^m\,Cos.^m(\alpha-\alpha')\,\{Sin.\,\alpha'\,Cos.(\alpha-\alpha') + Cos.\,\alpha'\,Sin.(\alpha-\alpha')\}\,\partial\alpha$$
$$= r^m\,Sin.\,\alpha'\,Cos.^{m+1}(\alpha-\alpha')\,.\,\partial(\alpha-\alpha')$$
$$- r^m\,Cos.\,\alpha'\,Cos.^m(\alpha-\alpha')\,\partial\,.\,Cos.(\alpha-\alpha').$$

Hiervan de integraal tusfchen de aangewezen grenzen nemende, komt:

1°. als $m$ *even* is:

$$\int_0^{2\pi}(x\,Cos.\,\alpha + y\,Sin.\,\alpha)^m\,Sin.\,\alpha\,.\,\partial\alpha = 0.$$

2°. als $m$ *oneven* is:

$$\int_0^{2\pi}(x\,Cos.\,\alpha + y\,Sin.\,\alpha)^m\,Sin.\,\alpha\,\partial\alpha = r^m\,Sin.\,\alpha'\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\,..\,m}{2\,.\,4\,.\,6\,..\,m+1}\times 2\pi.$$

Op dezelfde wijze vindt men:

$$(x\,Cos.\,\alpha + y\,Sin.\,\alpha)^m\,Cos.\,\alpha\,\partial\alpha$$
$$= r^m\,Cos.^m(\alpha-\alpha')\,\{Cos.\,\alpha'\,Cos.(\alpha-\alpha') - Sin.\,\alpha'\,Sin.(\alpha-\alpha')\}\,\partial\alpha$$
$$= r^m\,Cos.\,\alpha'\,Cos.^{m+1}(\alpha-\alpha')\,\partial(\alpha-\alpha')$$
$$+ r^m\,Sin.\,\alpha'\,Cos.^m(\alpha-\alpha')\,\partial\,.\,Cos.(\alpha-\alpha'),$$

en vervolgens:

1°. als $m$ *even* is:

$$\int_0^{2\pi}(x\,Cos.\,\alpha + y\,Sin.\,\alpha)^m\,Cos.\,\alpha\,\partial\alpha = 0.$$

2°. als $m$ *oneven* is:

$$\int_0^{2\pi}(x\,Cos.\,\alpha + y\,Sin.\,\alpha)^m\,Cos.\,\alpha\,\partial\alpha = r^m\,Cos.\,\alpha'\,.\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\,..\,m}{2\,.\,4\,.\,6\,..\,(m+1)}\times 2\pi.$$

Alzoo bekomen wij:

$$\int_0^{2\pi}\frac{y''}{s^3}\,\partial\alpha = 2\pi\,.\,\frac{R\,Sin.\,\alpha'}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\left\{\frac{3}{1}\,.\,\frac{1}{2}\mu + \frac{3\,.\,5\,.\,7}{1\,.\,2\,.\,3}\times\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\mu^3 + \frac{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\times\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\mu^5 + \&c.\right\},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{x''}{s^3}\,\delta\alpha = 2\pi \cdot \frac{R\,Cos.\,\alpha'}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left\{\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2}\mu + \frac{3\cdot5\cdot7}{1\cdot2\cdot3}\times\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\mu^3 + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\times\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\mu^5 + \&c.\right\}.$$

Stellende dus: $\mu = \frac{rR}{R^2+r^2}$

en $N = \frac{R^2}{(R^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \times$

$$\left\{\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3\cdot5\cdot7}{1\cdot2\cdot3}\times\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\mu^2 + \frac{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\times\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\mu^4 + \&c.\right\},$$

welke reeks altijd convergeert, zoo lang $\mu < \frac{1}{2}$ is, dat is, zoo lang $r$ en $R$ ongelijk zijn, komt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{y''}{s^3}\,\delta\alpha = 2\pi N\,.\,r\,Sin.\,\alpha' = 2\pi N y,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{x''}{s^3}\,\delta\alpha = 2\pi N\,.\,r\,Cos.\,\alpha' = 2\pi N x.$$

Merkt men nu op, dat wij de masſa van het punt M voorgeſteld hebben door $E\,\delta\alpha$, dat dus $2\pi E$ de geheele masſa van den grooten ring is, zoo vindt men, deze laatſte masſa $= M'$ ſtellende, volgens (23):

$$\left.\begin{aligned} P''x - P\,z &= -N\,.\,l\,.\,M'\,.\,x\,z,\\ P''y - P'z &= -N\,.\,l\,.\,M'\,.\,y\,z \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

## § 13.

Volgens (21) moeten deze uitdrukkingen met de masſa $m$ van het punt P vermenigvuldigd, en dan nogmaals geïntegreerd worden over den geheelen omtrek van den kleinen ring, dat is mede tusſchen de grenzen o en $2\pi$.

Stellende in de uitdrukkingen voor $x$, $y$, enz. (§ 5) $a = o$, zoo heeft men:

$$x = r\,(-\,Cos.\,\beta\,Sin.\,\psi\,Sin.\,(\lambda+\phi) + Cos.\,\psi\,Cos.\,(\lambda+\phi)),$$
$$y = r\,(+\,Cos.\,\beta\,Cos.\,\psi\,Sin.\,(\lambda+\phi) + Sin.\,\psi\,Cos.\,(\lambda+\phi)),$$
$$z = r\,.\,Sin.\,\beta\,Sin.\,(\lambda+\phi).$$

 Zij

Zij voorts $m = M^\circ . \frac{\partial \lambda}{2\pi}$, waarbij nu $M^\circ$ de massa van den kleinen ring is, dan vindt men gemakkelijk, ten opzigte van $\lambda$ integrerende,

$$\Sigma m x z = \int_0^{2\pi} M^\circ . x z . \frac{\partial \lambda}{2\pi} = -\tfrac{1}{2} M^\circ . r^2 \, Sin.\beta \, Cos.\beta \, Sin.\psi$$

en

$$\Sigma m y z = \int_0^{2\pi} M^\circ . y z . \frac{\partial \lambda}{2\pi} = +\tfrac{1}{2} M^\circ \, r^2 \, Sin.\beta \, Cos.\beta \, Cos.\psi.$$

Dus bekomen wij eindelijk volgens (24):

$$\Sigma m (P'' x - P z) = + \tfrac{1}{2} N . l . M^\circ . M' . r^2 . Sin.\beta \, Cos.\beta \, Sin.\psi,$$
$$\Sigma m (P'' y - P z) = - \tfrac{1}{2} N . l . M^\circ . M' . r^2 \, Sin.\beta \, Cos.\beta \, Cos.\psi.$$

Daar nu verder

$$x \partial y - y \partial x = 2 \partial V,$$
$$x \partial z - z \partial x = 2 \partial V',$$

en

$$y \partial z - z \partial y = 2 \partial V'',$$

zoo heeft men, volgens (21) en (22):

$$\left.\begin{aligned}
&2 \Sigma m \partial \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = 0, \\
&2 \Sigma m \partial \left(\frac{\partial V'}{\partial t}\right) = + \tfrac{1}{2} N . l . M^\circ . M' . r^2 . Sin.\beta \, Cos.\beta \, Sin.\psi \, \partial t, \\
&2 \Sigma m \partial \left(\frac{\partial V''}{\partial t}\right) = - \tfrac{1}{2} N . l . M^\circ . M' . r^2 \, Sin.\beta \, Cos.\beta \, Cos.\psi \, \partial t
\end{aligned}\right\} (25).$$

Voeren wij weder, in plaats van $\Sigma m V$, $\Sigma m V'$ en $\Sigma m V''$, $Q^\circ$, $Q$ en $Q'$ in, dan komt, volkomen op dezelfde wijze als in § 4, eerstelijk:

$$\partial^2 Q' - \partial Q . \partial \psi = 0$$

en

$$\partial^2 Q + \partial Q' \, \partial \psi = - \tfrac{1}{4} N . l . M' \, r^2 . Sin.\beta \, Cos.\beta . \partial t^2,$$

en dan:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial Q^\circ}{\partial t} = A, \\
&\partial \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q'}{\partial t}\right)^2 \right\} = - \tfrac{1}{2} N . l . M' . r^2 \, Sin.\beta \, Cos.\beta . \partial Q, \\
&\frac{\partial^2 Q'}{\partial t^2} - \frac{\partial Q}{\partial t} . \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0
\end{aligned}\right\} (26).$$

Deze

Deze vergelijkingen stemmen overeen met de vergelijkingen (11.) voor de beweging des tols. De eerste en laatste zijn geheel dezelfde; maar in de tweede vindt men, in plaats van de grootheid U, evenredig aan *Sin.* $\beta$, eene andere grootheid, evenredig aan *Sin.* $\beta$ *Cos.* $\beta$, of aan *Sin.* $2\beta$.

## § 14.

Stellen wij in de vergelijkingen (12) $a = 0$, dan komt:

$$\delta Q^\circ = \tfrac{1}{2} r^2 \, Cos.\beta \, \delta\varphi + \tfrac{1}{2} r^2 (1 - \tfrac{1}{2} Sin.^2 \beta) \delta\psi,$$
$$\delta Q = \tfrac{1}{4} r^2 \, \delta\beta,$$
$$\delta Q' = \tfrac{1}{2} r^2 \, Sin.\beta \, \delta\varphi + \tfrac{1}{4} r^2 \, Sin.\beta \, Cos.\beta \, \delta\psi.$$

Dus is:

$$\int Sin.\beta \, Cos.\beta \, \delta Q = -\tfrac{1}{16} r^2 (B + Cos.\, 2\beta),$$

en, volgens de tweede vergelijking (26),

$$\tfrac{1}{16} r^4 \left(\frac{\delta\beta}{\delta t}\right)^2 + \left(\frac{\delta Q'}{\delta t}\right)^2 = + \tfrac{1}{32} N.\, l.\, M' \, r^4 (B + Cos.\, 2\beta),$$

of
$$\left(\frac{\delta\beta}{\delta t}\right)^2 + \frac{16}{r^4}\left(\frac{\delta Q'}{\delta t}\right)^2 = + \tfrac{1}{2} N.\, l.\, M' (B + Cos.\, 2\beta).$$

Stellende weder, eenvoudigheidshalve, $\frac{\delta Q'}{\delta t} = \frac{1}{2} r^2 . u$, zoo komt, op gelijke wijze als in § 7, als men nog A voor $\frac{2}{r^2}$A schrijft:

$$A = Cos.\beta \, . \frac{\delta\varphi}{\delta t} + (1 - \tfrac{1}{2} Sin.^2 \beta) \frac{\delta\psi}{\delta t},$$

$$u = Sin.\beta \; \frac{\delta\varphi}{\delta t} + \tfrac{1}{2} Sin.\beta \, Cos.\beta \, . \frac{\delta\psi}{\delta t},$$

$$\delta u = \tfrac{1}{2} \frac{\delta\beta}{\delta t} \, . \delta\psi.$$

Dus is $\quad A \, Sin.\beta - u \, Cos.\beta = \tfrac{1}{2} Sin.\beta \, . \frac{\delta\psi}{\delta t},$

$$= Sin.\beta \, . \frac{\delta u}{\delta \beta}.$$

Hieruit $\quad Sin.\beta \, \delta u + u \, \delta Sin.\beta = A \, Sin.\beta \, . \delta\beta$

en $\quad u \, Sin.\beta = C - A \, Cos.\beta.$

 Alzoo.

Alzoo $$\frac{16}{r^4}\left(\frac{\partial Q'}{\partial t}\right)^2 = 4u^2 = 4\left(\frac{C - A\,Cos.\beta}{Sin.\beta}\right)^2,$$

en mitsdien, volgens (26):

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2 + 4\left(\frac{C - A\,Cos.\beta}{Sin.\beta}\right)^2 = \tfrac{1}{2}N.l.M'(B + Cos.2\beta).$$

Verder is

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = 2\frac{\partial u}{\partial\beta} = 2\,.\,\frac{A - C\,Cos.\beta}{Sin.^2\beta};$$

dus $$A = Cos.\beta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + 2(1 - \tfrac{1}{2}Sin.^2\beta).\frac{A - C\,Cos.\beta}{Sin.^2\beta},$$

Waaruit $$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = C - 2\,\frac{A - C\,Cos.\beta}{Sin.^2\beta}\,.\,Cos.\beta.$$

De formulen verzamelende hebben wij dus:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= C - 2\,\frac{A - C\,Cos.\beta}{Sin.^2\beta}\,.\,Cos.\beta,\\ \frac{\partial\psi}{\partial t} &= 2\,\frac{A - C\,Cos.\beta}{Sin.^2\beta},\\ \left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2 &= \tfrac{1}{2}N\,l.M'(B + Cos.2\beta) - 4\left(\frac{C - A\,Cos.\beta}{Sin.\beta}\right)^2\end{aligned}\right\}\;27)$$

Wanneer men deze uitdrukkingen vergelijkt met de uitdrukkingen (15) van de beweging eens tols, dan blijkt, dat het eenige onderscheid in den vorm daarin bestaat, dat in de laatste vergelijking (27) $+ Cos.2\beta$, en in de laatste vergelijking (15) $- Cos.\beta$ staat; en wanneer men in (15) $a$ negatief neemt, dan verdwijnt ook het verschil der teekens dezer cosinussen.

## § 15.

Zij, ter bepaling der constanten, voor $t = 0$:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = p,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0,\quad \frac{\partial\beta}{\partial t} = 0,\quad \beta = \beta',$$

dan wordt $$C = p,$$
$$A = p\,Cos.\beta',$$
$$B = 8.\frac{p^2}{N\,l\,M'}.Sin.^2\beta' - Cos.2\beta'.$$

Ge-

Gevolgelijk

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) &= p - 2p\,.\,\frac{Cos.\,\beta}{Sin.^2\,\beta}\,(Cos.\,\beta' - Cos.\,\beta),\\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) &= \qquad 2p\,.\,\frac{Cos.\,\beta' - Cos.\,\beta}{Sin.^2\,\beta},\\ \left(\frac{\partial\beta}{\partial t}\right)^2 &= \left\{N\,l\,M'(Cos.\,\beta + Cos.\,\beta') - 4p^2\,.\,\frac{Cos.\,\beta - Cos.\,\beta'}{Sin.^2\,\beta}\right\}\\ &\qquad \times (Cos.\,\beta - Cos.\,\beta')\end{aligned}\right\}(28)$$

Het blijkt uit de laatste uitdrukking, dat steeds

$$Cos.\,\beta > Cos.\,\beta' \text{ of } \beta < \beta'$$

zijn moet, zoo dat $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)$ nu steeds negatief wordt. De *lijn der knoopen* is dus *teruglo opende*. Verder moet ook

$$N\,l\,M'(Cos.\,\beta + Cos.\,\beta') > 4p^2\,.\,\frac{Cos.\,\beta - Cos.\,\beta'}{Sin.^2\,\beta} \quad \text{zijn,}$$

of $\quad N\,l\,M'\,Sin.^2\,\beta > 4p^2\,.\,Tang.\,\tfrac{1}{2}(\beta+\beta')\;Tang.\,\tfrac{1}{2}(\beta'-\beta);$

dus $\quad Tang.\,\tfrac{1}{2}(\beta'-\beta) < \dfrac{N\,.\,l\,.\,M'}{4p^2} \times \dfrac{Sin.^2\,\beta}{Tang.\,\tfrac{1}{2}(\beta+\beta')}.$

Laat, ter bepaling van $l$, het volgende gegeven zijn:

De massa der Aarde . . . . . $= \mathfrak{M}$.
Straal der Aarde . . . . . . . $= \mathfrak{R}$.
Versnelling in eene seconde . . $= g$.

De massa van den vasten ring, in één punt vereenigd, $= M'$,
Afstand van daar . . . . . . . . . . . . . $= s$,
Versnelling in eene seconde, op den afstand $s$, naar $M'$ . . . . . . . . . . . . . . . $= G$.

dan is $\quad g : G = \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^2} : \dfrac{M'}{s^2},$

en dus $\quad G = \dfrac{M'}{\mathfrak{M}} \times \dfrac{\mathfrak{R}^2}{s^2} \times g.$

Nu hebben wij de snelheid, welke eene massa $M'$ aan een ligchaam, op den afstand $s$, in 1″, mededeelt, voorgesteld door $l\,.\,\frac{M'}{s^2}$. Deze snelheid is ook gelijk aan $G$: dus is

$$l\,.\,\frac{M'}{s^2} = g\,.\,\frac{M'}{s^2}\,.\,\frac{\mathfrak{R}^2}{\mathfrak{M}};$$

dus

dus wordt $$l = g \cdot \frac{\mathfrak{a}^2}{\mathfrak{M}}$$

en $$l M' = g \cdot \mathfrak{a}^2 \cdot \frac{M'}{\mathfrak{M}}.$$

Laat nog, om nog eene andere uitdrukking te bekomen,

D' de digtheid van den grooten ring zijn,

D de digtheid der Aarde,

$a'$ de straal van eenen bol, van gelijken inhoud als de vaste ring, dan is

$$\frac{M'}{\mathfrak{M}} = \left(\frac{D'}{D}\right) \cdot \left(\frac{a'}{\mathfrak{a}}\right)^3;$$

dus ook $$l M' = \left(\frac{g}{\mathfrak{a}}\right) \cdot \left(\frac{D'}{D}\right) \cdot a'^3.$$

Men ziet, dat $M' l$ een zeer klein getal moet zijn, ten zij dan dat $a'$ zeer groot was, omdat $\mathfrak{a}$ meer dan een millioen malen $\frac{1}{2} g$ overtreft.

Zij nu $$N = \tfrac{3}{2} \mu' \cdot \frac{R^2}{(R^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}},$$

dan is $\mu'$ een getal, dat slechts weinig grooter dan 1 is. Dan komt

$$N l M' = \tfrac{3}{2} \frac{g}{\mathfrak{a}} \cdot \mu' \cdot \left(\frac{D'}{D}\right) \cdot \left(\frac{a'}{R}\right)^3 \cdot \frac{R^5}{(R^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}},$$

of zeer nabij $$N l M' = \tfrac{3}{2} \frac{g}{\mathfrak{a}} \left(\frac{D'}{D}\right) \left(\frac{a'}{R}\right)^3.$$

Uit deze laatste uitdrukking volgt, dat de werking van *gelijkvormige* ringen, van verschillende grootten, op den binnensten ring, zeer nabij dezelfde is.

Laat nu nog de kleine ring $n$ graden in 1″ omwentelen, dan legt een punt op den afstand 1 van het middelpunt, in 1″ tijds, eenen weg af $= \frac{n}{360} \times 2\pi$; dus is

$$p = \frac{n\pi}{180}.$$

Alzoo bekomen wij ten laatste:

$$\frac{N l M'}{4p^2} = \frac{3 \times \overline{90}^2 \mu'}{2\pi^2} \left(\frac{D'}{D}\right) \cdot \frac{g}{\mathfrak{a}} \cdot \left(\frac{a'}{R}\right)^3 \cdot \frac{R^5}{(R^2 + r^2)^{\frac{5}{2}}} \times \frac{1}{n^2} =$$

$$= \frac{3\times\overline{90}^2}{2\pi^2} \cdot \left(\frac{D'}{D}\right)\left(\frac{g}{a}\right)\left(\frac{a'}{R}\right)^2 \times \frac{1}{n^2} \text{ zeer nabij.}$$

De waarde dezer uitdrukking is in het algemeen zeer klein; zij dezelve $=\delta$, dan moet

$$Tang.\tfrac{1}{2}(\beta'-\beta) < \delta \times \frac{Sin.^2\beta}{Tang.\tfrac{1}{2}(\beta'+\beta)}$$

zijn, en dus moet ook $\beta'-\beta$ steeds zeer klein blijven. Hieruit volgt, dat de helling van het vlak des kleinen rings, op dat van den grooten, maar zeer weinig kan veranderen.

Stellen wij weder $\beta=\beta'-\rho$, dan is $\rho$ mede een zeer klein getal: wij hebben dan, behoudende $\rho^2$,

$$Cos.\beta = Cos.\beta' + \rho\, Sin.\beta' - \tfrac{1}{2}\rho^2\, Cos.\beta',$$

$$Cos.^2\beta - Cos.^2\beta' = 2\rho\, Sin.\beta'\, Cos.\beta' - \rho^2(Cos.^2\beta' - Sin.^2\beta'),$$

$$(Cos.\beta - Cos.\beta')^2 = \rho^2 . Sin.^2\beta'.$$

Hierdoor wordt de laatste vergelijking (28):

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2 = 4p^2\left\{2\delta\, Sin.\beta' Cos.\beta'.\rho - (1+\delta(Cos.^2\beta' - Sin.^2\beta'))\rho^2\right\}$$

$$= n\rho - i^2.\rho^2.$$

Waaruit weder, even als in § 9, volgt:

$$\rho = \frac{n}{2i^2}\left\{1 - Cos.(it+c)\right\}.$$

Wij bekomen dus weder, stellende:

$$\delta = \frac{3.\overline{90}^2}{2\pi^2}\mu' . \left(\frac{D'}{D}\right) . \frac{g}{a} . \left(\frac{a'}{R}\right)^2 . \frac{R}{(R^2+r^2)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{n^2},$$

$$i = \frac{n\pi}{90} . \sqrt{1+\delta(Cos.^2\beta' - Sin.^2\beta')},$$

$$\rho = \frac{\delta\, Sin.\beta'\, Cos.\beta'}{1+\delta(Cos.^2\beta' - Sin.^2\beta')} . \left\{1 - Cos.(it+c)\right\} \quad . \quad (29).$$

Hieruit volgt, dat alle veranderingen van $\beta$ voorvallen in eene periode, waarvan de *duur* gelijk is aan $\frac{2\pi}{i}$, dat is, een weinig korter dan $\tfrac{1}{2} . \frac{360}{n}$, of den duur eener halve omwenteling.

Wij hebben vervolgens, nu met verwaarloozing van $\rho^2$ en $\delta^2$,

$$\frac{Cos.\beta - Cos.\beta'}{Sin.^2\beta} = \frac{\rho}{Sin.\beta'} = \delta . Cos.\beta'\left\{1 - Cos.(it+c)\right\},$$

en

en dus $\frac{\partial\psi}{\partial t} = -2p.\delta.\,Cos.\beta'\left\{1 - Cos.(it+c)\right\}$.

Waaruit $\psi = -2\frac{p}{i}\,.\,\delta\,Cos.\beta'\left\{it - Sin.(it+c)\right\} + Const.$

of $\psi = -\delta.\,Cos.\beta'\left\{it - Sin.(it+c)\right\} + Const.$ (30).

De gemiddelde waarde der verandering van $\psi$ zal dus zijn, in het tijdverloop $(t'-t)$:

$$\psi' - \psi = -\delta.\,i.\,Cos.\beta'.(t'-t) \quad . \quad . \quad (31).$$

Stellen wij weder de constanten der vergelijkingen (29) en (30) gelijk *nul*, en $x = \psi\,Sin.\beta'$, nevens $y = \rho$, dan komt:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\delta\,Sin.\beta'\,Cos.\beta'\,(it - Sin.\,it),\\ y &= +\delta\,Sin.\beta'\,Cos.\beta'\,(1 - Cos.\,it) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (32).$$

Een punt der loodlijn, op het midden van den kleinen ring opgerigt, beschrijft alzoo, even als een punt van de as des tols, eene onafgebrokene rij kromme lijnen, die zeer na met cycloïden overeenstemmen. Deze cycloïden zijn, voor een punt *boven* den ring, *naar boven* gekeerd.

Eindelijk hebben wij nog, even als in § 9, volgens (27) en (28):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial t}\,Cos.\beta = p,$$

en dus $\varphi' - \varphi + \int \partial\psi\,Cos.\beta = p\,(t'-t)$ . . (33).

De snelheid van wenteling des kleinen rings is dus ook hier standvastig.

## § 16.

Zij tot een voorbeeld $p$ = de snelheid van de wenteling der aarde om hare as, dan is

$$n = \frac{360}{24 \times 60 \times 60} = \frac{1}{240}.$$

Verder $a = \frac{20.000\,000}{\pi}$, $\frac{1}{2}g = 4{,}902477$;

dus $\frac{3 \times \overline{90}^2}{2n^2.\pi}\,.\,\frac{g}{a} = \frac{3 \times \overline{90}^2 \times \overline{240}^2 \times 4{,}902477}{\pi \times 20.000.000} = 109{,}21.$

Laat

Laat voorts de masſa M′ van den vasten ring gelijk zijn aan de masſa der Zon, en laat R de gemiddelde afſtand van de Aarde tot de Zon wezen, dan is ook D′ de digtheid der Zon, en wij hebben:

$$\frac{D'}{D} = \frac{1}{3{,}9326},$$

$$\frac{a'}{R} = Sin.\tfrac{1}{2}\odot = Sin.\,16'\,0'',98.$$

Dus wordt:

$$\delta = 109{,}21 \times \frac{1}{3{,}9326} \times Sin.^2(16'\,0'',98),$$

$$= 0{,}0000028083.$$

Stellen wij nog $\beta' = 23^\circ\,28'$ en $\tfrac{1}{2}(\beta' + \beta) = \beta'$, dan wordt

$$Tang.\tfrac{1}{2}(\beta' - \beta) < 0{,}0000028083 \times Sin.\,23^\circ\,28' \times Cos.\,23^\circ\,28',$$

of

$$\beta' - \beta < 0'',042318.$$

Zij verder $t' - t = 1$ jaar $= 365{,}25 \times 24 \times 60 \times 60$ seconden, dan komt, voor de verplaatsing van de lijn der knoopen, in den tijd van één jaar, volgens (31):

$$\psi' - \psi = -4'\,4''.$$

Zooveel zoude de knoopen-lijn, door de werking des grooten rings op den kleinen, jaarlijks terug gaan.

Hadden wij de masſa van den grooten ring gelijk aan de masſa der maan genomen, maar ook tevens R gelijk aan den gemiddelden afſtand der maan, dan zoude $\frac{a'}{R}$ nabij hetzelfde gebleven zijn, maar door de meerdere digtheid der maan zoude de uitkomst in $\beta$ en $\psi$ ruim $2\tfrac{1}{2}$ malen grooter geworden zijn, dat is:

$$\beta' - \beta < 0'',1 \text{ en } \psi' - \psi = -10' \text{ nagenoeg in één jaar.}$$

## § 17.

Het is opmerkelijk, dat de grootte van den kleinen ring genoegzaam geenen invloed op de gevondene waarden van $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ en $\frac{\partial\beta}{\partial t}$ heeft, wordende alleenlijk N een weinigje vermeerderd,

als

als *r* merkelijk toeneemt. Hieruit volgt, dat, zoo wij in plaats van den kleinen ring, een masſief rond vlak onderſteld hadden, de uitkomſten zeer nabij dezelfde zouden geweest zijn. Anders zoude het gelegen wezen, wanneer wij ook nog aan dit ronde vlak dikte zouden onderſtellen; bijv. aannemen, dat om het punt B eene ellipsoïde, draaijende om hare omwentelings-as, zich zoude bewegen. De veranderingen van $\psi$ en $\beta$ zouden voor de ellipsoïde minder zijn dan voor het vlak, en wel te minder, naarmate de gedaante der ellipsoïde meer tot den bolvorm zoude naderen. De bol zoude door de aantrekking van den ring geene wijziging in zijne beweging meer ondervinden, zoo als bij het platte vlak of den ring. Maar onderſtellen wij, dat, bij voortgaande verandering in de gedaante des draaijenden ligchaams, de bol overging in eene, in de rigting der polen verlengde ellipsoïde, dan zouden de veranderingen van $\beta$ en $\psi$ weder aanvangen, maar zij zouden van teeken verwisseld zijn; zoodat bij deze ellipsoïde, even als bij den gewonen tol, de verplaatſingen der knoopen lijn *regtſtreeks voortgaande* zoude wezen; terwijl bij de afgeplatte ellipsoïde, even als dan, wanneer bij den tol het zwaartepunt *onder* het ſteunpunt ligt, die verplaatſing *teruggaande* is.

Men kan de verplaatſingen van het vlak des kleinen rings door eene aantrekking van buiten, ook door eene proef aanwijzen. Laat men namelijk het zwaartepunt van den blikken ring (Fig. 10) met het ſteunpunt A zamen vallen, en geeft aan den ring eene ſnelle draaijende beweging, dan verandert, gelijk aangetoond is, het vlak des rings noch de as van ſtelling. Maar nadert men nu met ééne der polen eens magneetſtaafs, hetzij bij het bovenſte gedeelte *links*, hetzij bij het onderſte deel van den draaijenden ring *regts*, dan neemt terſtond het vlak des rings eene beweging aan, waarbij de helling ſtandvastig blijft, maar de knoopenlijn zich teruggaande verplaatst. Ingeval de ring geene wentelende beweging bezat, zoude het uitwerkſel van het naderen eens magneets geheel anders zijn: het punt van den ring, het naast bij den magneet gelegen, zoude dan zoo mogelijk nog nader bij den magneet komen. Bij den draaijenden ring ſchijnt dit naaste punt, of liever de opvolgende naaste punten, veeleer van den magneet zich te verwijderen.

§ 18.

## § 18.

De overeenstemming van een en ander met de bewegingen der aarde om haar middelpunt, valt nu ligt aan te wijzen. Men weet, dat de aarde dagelijks om hare as wentelt; dat die as wel *bijna* evenwijdig aan zich zelve blijft, maar niet volstrekt, beschrijvende in ongeveer 5000 jaren een kegelvlak om de as der polen van de ecliptica, en wel in eene aan de dagelijksche beweging tegengestelde rigting; maar men weet ook, dat de aarde afgeplat is aan de polen, en dat zij van buiten af door de zon wordt aangetrokken. De helling van den equator op de ecliptica blijft onveranderd, maar de punten van doorsnijding dezer cirkels, de evennachts-punten, hebben eene teruggaande beweging aan den hemel, *praecessie* of teruggang der evennachten genaamd. Dit verschijnsel, het eerst door HIPPARCHUS, 200 jaren vóór onze tijdrekening, vermoed, en door PTOLOMEUS, 3½ eeuw later, buiten twijfel gesteld, maar eerst door NEWTON verklaard, heeft geene andere oorzaak, dan eene geheel gelijksoortige als de teruggaande beweging van de lijn der knoopen bij den kleinen ring, of die teruggaande beweging bij den tol, als het zwaarte-middelpunt (Fig. 10) onder het steunpunt ligt.

Beschouwen wij de aarde tijdens den zomer-zonnestand. Laat E Q (Fig 13) de rigting des equators zijn, *p* P de as, en B Z eene lijn, die naar het midden der zon getrokken is. Dan is het duidelijk, dat de aantrekking der zon, iets grooter zijnde op het nader bij gelegen gedeelte B Q dan op het meer verwijderde B E, moet trachten, om het vlak E Q in de rigting B Z te brengen. Dit zoude ook werkelijk het gevolg dier aantrekking zijn, zonder de wentelende beweging der aarde om hare as. Bij den winter-zonnestand, wanneer de zon zich in de rigting B Z′ van de aarde bevindt, is het streven van de aantrekking der zon hetzelfde, slechts wordt nu de helft E B meer aangetrokken dan de helft B Q der aarde. In andere betrekkelijke standen der zon en aarde heeft, gelijk ligt is na te gaan, nog hetzelfde plaats, slechts met dit verschil, dat dan de werking, om het vlak B Q in het vlak der ecliptica te brengen, minder sterk is, dan bij de zomer- en winter-

 zonne-

zonneftanden. Alleen het oogenblik, wanneer de zon zich juist in de evennachts-punten bevindt, is die werking geheel *nul.* Nu kan men, volgens eene aanmerking van LA PLACE (*Exposition du fystème du monde,* Chap. XIII), de *gemiddelde* werking der zon, uit alle betrekkelijke ftanden te zamen, vergelijken met de werking van eenen ring om de aarde, over welken ring de ftofmasfa der zon verdeeld zoude zijn. Wij hebben gezien, hoedanig de uitwerking van de aantrekking van zulk eenen ring zoude wezen: dezelfde uitwerking moet dus ook, gemiddeld, de aantrekking der zon hebben. De helling van den equator op de ecliptica moet ftandvastig blijven; maar de lijn van doorfnijding dezer vlakken moet eene teruggaande beweging aannemen.

Was de masfa der aarde in het platte vlak E Q vereenigd, dan zoude de teruggang der evennachts-punten, door de vereenigde werking van zon en maan, jaarlijks gemiddeld ruim 17′ bedragen; thans, nu de aarde afgeplat is, bedraagt deze teruggang flechts 51″.

Men weet ook, dat de punten van doorfnijding van den maansweg met de ecliptica, de maans-knoopen, eene teruggaande beweging hebben; dat zij alzoo in 18 jaren 219 dagen 360° doorloopen. De verklaring van dit verfchijnfel rust op dezelfde beginfelen, het is namelijk het refultaat van de aantrekking der zon, verbonden met de wentelende beweging der maan om de aarde. De maan kan daarbij befchouwd worden als één punt van onzen kleinen draaijenden ring.

Zoo ziet men, hoe belangrijke verfchijnfelen aan den hemel, en de bewegingen van eenen tol, door gelijkfoortige oorzaken geregeld worden.

# OVER DE

# INHOUDS BEREKENING EN DE BEPALING VAN HET ZWAARTEPUNT EENER UITGESTREKTE KLASSE VAN LIGCHAMEN,

VOLGENS EENE ENKELE FORMULE;

**EENE BIJDRAGE TOT DE STEREOMETRIE,**

DOOR

*R. LOBATTO.*

## OVER DE

## INHOUDSBEREKENING EN DE BEPALING VAN HET ZWAARTEPUNT EENER UITGESTREKTE KLASSE VAN LIGCHAMEN, VOLGENS EENE ENKELE FORMULE; EENE BIJDRAGE TOT DE STEREOMETRIE.

### § 1.

Voor eenigen tijd werd mijne aandacht gevestigd op zeker in 1847 te *Berlijn* uitgekomen werkje, ten titel voerende: *Ueber die Inhaltsberechnung der Körper, nach einer einziger Formel, bearbeitet von* W. LIGOWSKY, *Feuerwerker in der* 7e *Artillerie Brigade*. Het doel van dit geschrift is hoofdzakelijk, om aan te toonen, dat de verschillende formules voor de inhoudsberekening der in de gewone meetkunst voorkomende ligchamen, zoo mede der vaten met elliptische duigenkromte, allen bevat zijn in ééne enkele formule, welke zich aldus laat voorstellen:

$$Inh. = V = \tfrac{1}{6}h\{B + 4M + G\}.$$

Hierin beteekenen $B$ en $G$ de inhouden van twee evenwijdige grensvlakken of van de grond- en bovenvlakken, $M$ den inhoud van het middenvlak of van eene evenwijdige doorsnede genomen ter halver hoogte, en $h$ de hoogte van het ligchaam of den afstand der beide grensvlakken.

Het is duidelijk, dat zoodanige formule niet voor *alle* ligchamen zonder onderscheid, maar slechts voor eene bijzondere klasse van ligchamen, strikt *naauwkeurige* uitkomsten kan opleveren, en er alzoo eenig wiskundig kenmerk moet bestaan, waarnaar beoordeeld kan worden, of de naauwkeurige inhouds-berekening van eenig gegeven ligchaam al dan niet volgens de opgegevene formule kan geschieden.

De schrijver van het aangehaalde werkje echter, mijns inziens, in gebreke gebleven zijnde een dusdanig kenmerk aan te wijzen, zoo mist zijn arbeid hierdoor die volledigheid, waarvoor zij vatbaar

is. Mijne nasporingen omtrent dat onderwerp hebben mij niet alleen geleid tot het vinden van het bedoelde kenmerk, maar tevens in staat gesteld nog eene groote verscheidenheid van door gebogene oppervlakken begrensde ligchamen te doen kennen, op welker inhoudsberekening de vorige formule even *naauwkeurig* kan toegepast worden.

Het is mij bij die beschouwing daarenboven gebleken, dat er insgelijks ééne enkele formule bestaat, waardoor zich de ligging van het zwaartepunt bij eene uitgestrekte klasse van ligchamen naauwkeurig bepalen laat. Ik heb gemeend den vaderlandschen beoefenaren der wiskunde geene ondienst te doen, door hun mijne onderzoekingen nopens eene voor de praktijk niet onbelangrijke zaak hier mede te deelen, waartoe ik thans onmiddellijk overga.

## § 2.

Zij $I_x = \int y \partial x = \int F(x) \partial x$ de onbepaalde inhoud eener vlakke kromme lijn tot vergelijking hebbende $y = F(x)$. Het gedeelte $X$ van dezen inhoud, begrepen tusschen de as der abscissen en de ordinaten $F(x)$, $F(x+h)$, heeft dan blijkbaar tot waarde

$$X = I_{x+h} - I_x = h\frac{\partial I_x}{\partial x} + \tfrac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 I_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2.3}h^3\frac{\partial^3 I_x}{\partial x^3} + enz.$$

Stellende de achtervolgende differentiaal-quotiënten der functie $y$ door $F_1(x)$, $F_2(x)$, enz. voor, zoo gaat de voorgaande formule over in

$$X = I_{x+h} - I_x =$$
$$h\left\{F(x) + \tfrac{1}{2}hF_1(x) + \frac{1}{2.3}h^2F_2(x) + \frac{1}{2.3.4}h^3F_3(x) + \ldots\ldots\right\}. (1)$$

Nu is

$$F(x+\tfrac{1}{2}h) = F(x) + \tfrac{1}{2}hF_1(x) + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}h^2F_2(x) + \frac{1}{2.3}.\tfrac{1}{8}h^3F_3(x) + \ldots,$$

$$F(x+h) = F(x) + hF_1(x) + \tfrac{1}{2}h^2F_2(x) + \frac{1}{2.3}h^3F_3(x) + \ldots,$$

waaruit volgt

$$F(x) + 4F(x+\tfrac{1}{2}h) + F(x+h) =$$
$$6F(x) + 3hF_1(x) + h^2F_2(x) + \tfrac{1}{4}h^3F_3(x) + \frac{5}{96}h^4F_4(x) + \ldots.$$

en hierdoor verandert de formule (1) in

$$X = \tfrac{1}{6}h\left\{F(x) + 4F(x+\tfrac{1}{2}h) + F(x+h) - \frac{1}{2880}h^4F_4(x)\ldots\right\}.$$

Past men deze formule toe op kromme lijnen, welker vergelijkingen begrepen zijn in den vorm $y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$,

en voor welke dus de vierde en hoogere differentiaal-quotiënten verdwijnen, dan zal de formule

$$X = \frac{1}{6}h\left\{F(x) + 4F(x + \tfrac{1}{2}h) + F(x + h)\right\} \,..(2)$$

de waarde van den kromlijnigen inhoud $X$ *naauwkeurig* voorstellen; terwijl zij, in elk ander geval waarin $y$ eene onafgebroken functie blijft tusschen de grenzen $x$ en $x + h$, eene zeer benaderde waarde voor dezen inhoud zal kunnen opleveren, op welke laatste eigenschap wij later zullen terugkomen.

## § 3.

Indien eene kromme lijn, tot vergelijking hebbende $y^2 = F(x)$, om de as der $x$ wentelt, zal de inhoud $V$ van het omwentelingsligchaam, begrepen tusschen twee op den afstand $h$ van elkander verwijderde evenwijdige doorsneden loodregt op die as, insgelijks *naauwkeurig* uitgedrukt worden door de formule

$$V = \frac{1}{6}\pi h\left\{F(x) + 4F(x + \tfrac{1}{2}h) + F(x + h)\right\};$$

zoodra namelijk $F(x)$ of $y^2$ in den vorm $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$ begrepen is.

Noemende nu de doorsnede op den afstand $x$, het bovenvlak $B$, die op den afstand $x + h$, het grondvlak $G$, die op den afstand $x + \frac{1}{2}h$ of ter halver hoogte $h$, het middenvlak $M$, en stellende de inhouden dezer vlakken door gemelde letters voor, dan heeft men, voor al deze omwentelings-ligchamen, de eenvoudige formule

$$V = \frac{1}{6}h\{B + 4M + G\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$$

Hieruit laat zich onmiddellijk het besluit opmaken, dat deze formule insgelijks geldig zal zijn voor elk ligchaam, begrepen tusschen twee evenwijdige doorsneden op den afstand $h$, zoodra de inhoud $Y$ eener willekeurige evenwijdige doorsnede, genomen op den afstand $x$ van eenig punt, uitgedrukt wordt door eene functie van den vorm $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3$, of met andere woorden, door eene rationale functie van den eersten, tweeden of derden graad. In deze laatste eigenschap nu bestaat het hiervoren door ons bedoelde kenmerk voor de toepasselijkheid der formule $(\alpha)$.

## § 4.

De lagere meetkunst levert ons eene menigte ligchamen op, welker inhoud door die formule berekend kan worden. De

prisma's van willekeurige grondvlakken verschaffen daarvan de eenvoudigste toepassing. Voor die soort van ligchamen is blijkbaar $B = M = G$, dus $V = Bh$.

Beschouwen wij de afgeknotte piramiden, welker grond- en bovenvlakken willekeurige figuren zijn. Stellen wij $a$ voor den afstand van het bovenvlak tot den top, en $x$ voor dien eener willekeurige doorsnede $Y$, evenwijdig aan het eerste vlak, dan heeft men, gelijk bekend is, $Y = B \times \frac{x^2}{a^2}$. Deze functie van den tweeden graad zijnde, zoo zal de inhoud van het ligchaam uitgedrukt worden door

$$V = \tfrac{1}{6} h \{B + 4M + G\}.$$

Het is gemakkelijk aan te toonen, dat deze en de bekende formule met elkander overeenstemmen. Immers, noemende twee gelijkstandige zijden van het grond- en bovenvlak $m'$ en $m$, dan is die der doorsnede op de halve hoogte $\frac{1}{2}(m + m')$. Men heeft dus de evenredigheden

$$B : G = m^2 : m'^2, \quad B : M = m^2 : \tfrac{1}{4}(m + m')^2,$$

waaruit volgt $B + 4M + G = B\left\{1 + \left(\frac{m' + m}{m}\right)^2 + \frac{m'^2}{m^2}\right\}$

$$= B\left\{\frac{2m^2 + 2mm' + 2m'^2}{m^2}\right\} = 2\{B + G + \sqrt{BG}\};$$

derhalve is $\quad V = \frac{1}{3} h \{B + G + \sqrt{BG}\}$.

Die overeenstemming laat zich ook aldus betoogen. Men heeft

$G = B\left(\frac{a + h}{a}\right)^2$ en $M = B\left(\frac{a + \frac{1}{2}h}{a}\right)^2$; derhalve

$$V = \tfrac{1}{6} h\left\{B + \left(\frac{2a + h}{a}\right)^2 B + \left(\frac{a + h}{a}\right)^2 B\right\}$$

$$= \tfrac{1}{3} . \frac{Bh}{a^2}\{3a^2 + 3ah + h^2\} = \tfrac{1}{3} . \frac{Bh}{a^2}\{a^2 + a(a + h) + (a + h)^2\}$$

$$= \tfrac{1}{3} h \{B + \sqrt{BG} + G\}.$$

Alle scheeve afgeknotte kegels zijn dus insgelijks in dezelfde formule begrepen. Voor geheele kegels en piramiden is $B = 0$, en $M = \frac{1}{4}G$; dus $\quad V = \frac{1}{3} h \times G$.

## § 5.

Voor eene spherische schijf DEFG (Fig. 1, Pl. III), zal de

formule ($\alpha$) mede van toepassing moeten zijn, dewijl uit de vergelijking van den cirkel $y^2 = 2rx - x^2$ onmiddellijk volgt, dat de doorsnede $Y$ eene rationale functie van den tweeden graad is.

Men stelle OA $= r$, OB $= a$, BC $= h$, dan is

$$G = (r^2 - a^2)\pi, \quad B = (r^2 - (a+h)^2)\pi$$

en $\quad M = (r^2 - (a + \frac{1}{2}h)^2)\pi = \frac{1}{2}(B + G) + \frac{1}{4}h^2\pi;$

dus $\quad V = \frac{1}{6}h\{3(B+G) + h^2\pi\} = \frac{1}{2}h(B+G) + \frac{1}{6}h^2\pi,$

hetgeen met de bekende formule overeenstemt.

Zij $a + h = r$, alsdan verandert de schijf in een segment, tot hoogte hebbende $h$. In dat geval is $B = 0$, $G = (2rh - h^2)\pi$, en dus $V = \frac{1}{2}h(2rh - h^2)\pi + \frac{1}{6}h^2\pi = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$.

## § 6.

Zij $ax^2 + by^2 = cz$ de vergelijking eener elliptische paraboloïde ABDC (Fig. 2). De inhoud eener willekeurige doorsnede $Y$ loodregt door de as OD, op den afstand $z$ uit den top, heeft blijkbaar tot waarde $\pi \times \sqrt{\frac{cz}{a}} \times \sqrt{\frac{cz}{b}} = \frac{\pi cz}{\sqrt{ab}}$; eene functie van den eersten graad. De doorsneden dus evenredig aan den afstand uit den top zijnde, zoo is $M = \frac{1}{2}(B + G)$

en $\quad V = \frac{1}{6}h\{3B + 3G\} = \frac{1}{2}h(B + G)$.

Onderstellende dat $G$ en $B$ op de afstanden $\alpha$ en $\alpha + h$ genomen zijn, heeft men $G = \frac{c\alpha\pi}{\sqrt{ab}}$, $B = \frac{c(\alpha + h)\pi}{\sqrt{ab}}$, dus

$$V = \frac{ch(\alpha + \frac{1}{2}h)\pi}{\sqrt{ab}}.$$

Zij $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ de vergelijking eener ellipsoïde ACDB (Fig. 3). De inhoud $Y$ eener doorsnede, loodregt op de as der $x$, hier uitgedrukt wordende door $\frac{bc}{a^2}(a^2 - x^2)\pi$, en alzoo eene functie van den tweeden graad zijnde, zoo heeft men, ter bepaling van den inhoud der schijf, begrepen tusschen twee evenwijdige doorsneden, genomen op de afstanden $\alpha$ en $\alpha + h$ uit het middelpunt:

$$G = \frac{bc}{a^2}(a^2 - \alpha^2)\pi, \quad B = \frac{bc}{a^2}(a^2 - (\alpha + h)^2)\pi,$$

$$M = \frac{bc}{a^2}\left(a^2 - (a + \tfrac{1}{2}h)^2\right)\pi = \tfrac{1}{2}(B + G) + \tfrac{1}{4}.\,\frac{bc}{a^2}h^2\pi,$$

$$V = \tfrac{1}{6}h\left\{3(B + G) + \frac{bc}{a^2}h^2\pi\right\} = \tfrac{1}{2}h(B + G) + \tfrac{1}{6}.\frac{bc}{a^2}h^3\pi.$$

Voor de geheele ellipsoïde is $B = 0$, $G = 0$, $M = bc\pi$, $h = 2a$, dus $V = \tfrac{4}{3}\pi abc.$

## § 7.

Beschouwen wij thans een vat, waarvan de duigenkromte ABC (Fig. 4) elliptisch is. Zij BE $= a$ de halve spondsdiepte, AD $=$ CF $= b$ de halve bodemsmiddellijn, en de lengte of hoogte DF $= h$; voorts $a - b = v$; dan zal de inhoud van het vat, omdat hier $B = G = b^2\pi$ en $M = a^2\pi$ is, uitgedrukt worden door de eenvoudige formule

$$V = \tfrac{1}{3}h(B + 2M) = \tfrac{1}{3}\pi h(2a^2 + b^2),$$

of $V = \tfrac{1}{3}\pi h\left\{2a^2 + (a - v)^2\right\} = h\left\{(a - \tfrac{1}{3}v)^2 + \tfrac{2}{9}v^2\right\}\pi.$

Bijaldien de duigenkromte parabolisch ondersteld wordt, zoodat B de top en de lijn BE de rigting der as aanwijst, zal de vergelijking der omwentelende kromme, E tot oorsprong aannemende, uitgedrukt worden door $x^2 = p(a - y)$ of $y = a - \dfrac{x^2}{p}$.
De functie $Y$ hier van den vierden graad zijnde, zoo blijkt dat de formule ($\alpha$) *niet naauwkeurig* maar slechts *bij benadering* den inhoud van het parabolische vat zal doen kennen. In dat geval heeft men voor het halve vat, $G = a^2\pi$, $B = (a - v)^2\pi$ en $M = (a - \tfrac{1}{4}v)^2\pi$, dus

$$V = \tfrac{1}{2}.\,\tfrac{1}{6}h\pi\left\{a^2 + (a - v)^2 + (2a - \tfrac{1}{2}v)^2\right\}$$
$$= \tfrac{1}{2}h\pi\left\{(a - \tfrac{1}{3}v)^2 + \tfrac{7}{72}v^2\right\},$$

en voor het geheele vat

$$V = h\left\{(a - \tfrac{1}{3}v)^2 + \tfrac{7}{72}v^2\right\}\pi.$$

Met behulp der integraal-rekening, vindt men gemakkelijk voor den naauwkeurigen inhoud

$$V = h\left\{(a - \tfrac{1}{3}v)^2 + \tfrac{4}{45}v^2\right\}\pi,$$

waarvan het verschil met de benaderde waarde des te geringer wordt, naarmate $v$ kleiner is in vergelijking van $a$. Met verwaarloozing van den tweeden term, geeft elk der drie voorgaande

formules, de bekende benaderingsformule voor de inhoudsberekening der vaten van elliptische of parabolische duigenkromte, namelijk $V = h(a - \frac{1}{3}v)^2\pi$.

## § 8.

De afgeknotte veelhoekige piramiden vormen slechts een bijzonder geval van die soort van ligchamen, die door twee evenwijdige veelhoeken van hetzelfde aantal zijden $n$, en voorts door $n$ trapezia als opstaande zijvlakken begrensd zijn. De formule ($\alpha$) is mede op deze soort van ligchamen toepasselijk. Om zich hiervan te overtuigen, zoo laat de veelhoek ABCDEF (Fig. 5) het grondvlak, en abcdef de projectie van het bovenvlak van zoodanig ligchaam voorstellen. Nu is het altijd mogelijk eenige zijden van elk dezer veelhoeken zoodanig te verlengen, dat daaruit twee driehoeken PQR en pqr ontstaan, die onderling gelijkvormig zullen zijn. De overeenkomstige bijgevoegde driehoeken in beide veelhoeken zullen insgelijks twee aan twee gelijkvormig wezen, vermits hunne zijden evenwijdige rigtingen hebben. Brengt men nu vlakken door deze verlengde en evenwijdige lijnen; dan wordt het ligchaam hierdoor met even zoo vele driehoekige afgeknotte piramiden vermeerderd, als er driehoeken in het grond- en bovenvlak bijgevoegd zijn, terwijl het ligchaam zelve door die vermeerdering insgelijks in eene afgeknotte driehoekige piramide overgegaan is, welker inhoud $= V'$ zij; alle welke piramiden dezelfde hoogte $h$ als het ligchaam hebben.

Stellen wij de inhouden PQR en pqr $= I$ en $i$; de som der inhouden van de bijgevoegde driehoeken voor het grondvlak $= S$, en voor het bovenvlak $= s$. Brengen wij wijders eene evenwijdige doorsnede ter halver hoogte; zij $I'$ haar inhoud en $S'$ dat gedeelte derzelve, hetwelk op de bijgevoegde afgeknotte piramiden betrekking heeft. Stellende eindelijk de som der inhouden van deze laatste ligchamen $= V''$, dan is klaarblijkelijk

$$V = V' - V'';$$

maar $V' = \frac{1}{6}h(I + 4I' + i)$ en $V'' = \frac{1}{6}h(S + 4S' + s)$,

derhalve $V = \frac{1}{6}h\{(I - S) + 4(I' - S') + (i - s)\}$,

dat is $V = \frac{1}{6}h\{G + 4M + B\}$,

waarin wederom $G$, $B$ en $M$, het grond-, het boven- en het middenvlak des gegeven ligchaams beteekenen.

## § 9.

Maken wij hiervan eene eerste toepassing op het in Fig. 6 voorgestelde ligchaam, tot grond- en bovenvlak hebbende een' regthoek.

Laten $a$, $b$ de zijden van het grond- en $a'$, $b'$ die van het bovenvlak zijn; dan heeft men

$$G = ab,\ B = a'b',\ M = \tfrac{1}{2}(a + a') \times \tfrac{1}{2}(b + b');$$

dus
$$V = \tfrac{1}{6}h\,\{ab + a'b' + (a + a')(b + b')\}$$
$$= \tfrac{1}{6}h\,\{(2a + a')\,b + (2a' + a)\,b'\};$$

welke formule insgelijks geldig is voor eene afgeknotte vierhoekige piramide. Immers, alsdan heeft men $a : a' = b : b' = 1 : n$, $a' = na$, $b' = nb$, $(a + a')(b + b') = (n + 1)^2ab$,

$$V = \tfrac{1}{6}h.ab\,\{1 + n^2 + (n + 1)^2\} = \tfrac{1}{3}h.ab\,(1 + n^2 + n),$$

of
$$V = \tfrac{1}{3}h\,\{ab + \sqrt{aba'b'} + a'b'\}.$$

Voor $b' = 0$, gaat het bovenvlak in eene regte lijn EF over (Fig. 7) dus $B = 0$, $M = \tfrac{1}{2}(a + a') \times \tfrac{1}{2}b$ en $V = \tfrac{1}{6}h\{2a + a'\}b$.

De ribbe EF kan eene evenwijdige verplaatsing ondergaan op denzelfden afstand van het grondvlak, zonder dat de inhoud van het ligchaam hierdoor verandert.

In het bijzondere geval van EF $=$ AD, wordt $V = \tfrac{1}{2}h \times ab$. De inhoud van een drichoekig prisma wordt dus ook gevonden, door den inhoud van een der drie zijvlakken met den halven afstand der tegenoverliggende ribbe te vermenigvuldigen.

Bijaldien het grondvlak een trapezium is (Fig. 8), welks evenwijdige zijden en hoogte door $a$, $b$ en $c$ aangewezen worden, heeft men $B = 0, G = \tfrac{1}{2}c(a + b)$ en $M = \tfrac{1}{4}c\{\tfrac{1}{2}(a + a') + \tfrac{1}{2}(b + a')\}$; derhalve $V = \tfrac{1}{6}h\{\tfrac{1}{2}(a + b)c + \tfrac{1}{2}(2a' + a + b)c\} = \tfrac{1}{6}hc(a + b + a')$.

Daar nu $\tfrac{1}{2}ch$ den inhoud eener doorsnede loodregt op de drie evenwijdige ribben voorstelt, zoo volgt hieruit onmiddellijk, dat de inhoud van een willekeurig afgeknot driehoekig prisma gelijk is aan een derde van de som der drie evenwijdige ribben vermenigvuldigd met den inhoud eener loodregte doorsnede, even als zulks in de meetkunst uit andere gronden betoogd wordt.

## § 10.

Om de formule ($\alpha$) op een afgeknot regthoekig parallelopipedum (Fig. 9) toe te passen, neme men de zijvlakken DH en AG tot

grond- en bovenvlakken, en de ribbe AD tot hoogte aan. Zij nu AD $= a$, AB $= b$, AE $= h_1$, BG $= h_2$, CH $= h_3$ en DF $= h_4$, dan is $G = \frac{1}{2}b\,(h_3 + h_4)$, $B = \frac{1}{2}b\,(h_1 + h_2)$, $M = \frac{1}{2}b\,\{\frac{1}{2}(h_1 + h_4) + \frac{1}{2}(h_2 + h_3\}$. Derhalve komt er voor den inhoud van dit ligchaam

$$V = \tfrac{1}{6}ab\,\{\tfrac{1}{2}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) + h_1 + h_2 + h_3 + h_4\}$$
$$= ab \times \tfrac{1}{4}\,(h_1 + h_2 + h_3 + h_4).$$

Daar de punten E, F, G, H in hetzelfde vlak liggen, bestaat er tusschen de vier ribben $h_1, h_2, h_3, h_4$ de betrekking $h_1 + h_3 = h_2 + h_4$, waardoor de voorgaande uitkomst verandert in

$$V = ab \times \tfrac{1}{2}\,(h_1 + h_3) = ab \times \tfrac{1}{2}\,(h_2 + h_4).$$

De inhoud van dat ligchaam is dus gelijk aan het grondvlak AC vermenigvuldigd met een vierde van de som der vier opstaande ribben of met de helft van de som van twee dezer ribben die in hetzelfde diagonaal-vlak liggen.

## § 11.

Bij de beschouwing der uitgeholde ligchamen, zal men gemakkelijk inzien, dat ook derzelver inhoudsberekening volgens de formule ($\alpha$) geschieden kan, zoodra zulks zoo wel met het geheel als met het uitgeboorde gedeelte het geval is. Om hiervan eene enkele toepassing te maken, zoo laat de inhoud gevraagd worden van het ligchaam, dat van een' halven bol overig blijft, indien deze door een cilinder van gegeven straal concentrisch uitgehold wordt. Zij AG (Fig. 10) de straal des bols $= r$, GE die des cilinders $= r'$, BE $= \surd(r^2 - r'^2) = h$. Hier is nu $B = 0$, $G = h^2\pi$ en $M = (r^2 - \frac{1}{4}h^2 - r'^2)\,\pi = \frac{3}{4}h^2\pi$, dus $V = \frac{1}{6}h \times 4h^2\pi = \frac{2}{3}h^3\pi$. Voor het dubbele ligchaam is $B = 0$, $G = 0$ en $M = h^2\pi$, dus

$$V = \tfrac{4}{3}h^3\pi.$$

Het uitgeholde ligchaam is hetzelfde als dat, ontstaande uit de omwenteling des segments ABE om de lijn OG.

## § 12.

Behalve de door platte vlakken begrensde ligchamen, die reeds hiervoren behandeld zijn en tot het gebied der lagere meetkunst behooren, bestaat er nog eene klasse van door scheve vlakken begrensde ligchamen, welker inhoudsberekening mede voor de toepassing der formule ($\alpha$) vatbaar is, gelijk wij zulks thans door eenige voorbeelden zullen doen zien.

Fig. 11 stelle een ligchaam voor tot grondvlak hebbende eenen driehoek ABC, en tot opstaande zijvlakken een parallelogram BE, eenen driehoek ABD, en het scheeve oppervlak ACED voortgebragt door de beweging eener regte lijn langs de ribben AD,CE en evenwijdig aan het grondvlak ABC, welk oppervlak, zoo als bekend is, tot de hyperbolische paraboloïden behoort. Dit ligchaam kan als eene soort van *Conoïde* beschouwd worden, waarbij de rigtlijn tot eene regte lijn overgaat. Snijden wij het door een vlak evenwijdig aan het grondvlak en op den afstand $x$ van de evenwijdige ribbe DE, dan is deze doorsnede abc een driehoek waarin bc = BC, en welks inhoud staat tot dien van het grondvlak als ab tot AB. Men heeft dus de evenredigheid

$$Y : G = \mathrm{Db} : \mathrm{DB} = x : h \text{ of } Y = \frac{x}{h}\, G.$$

De functie $Y$ alzoo van den eersten graad zijnde, zoo geeft de toepassing der formule ($\alpha$), als zijnde hier $B = 0$ en $M = \frac{1}{4}G$

$$V = \tfrac{1}{6}h \times 3G = \tfrac{1}{2}Gh.$$

De inhoud van zoodanig ligchaam is derhalve gelijk aan het grondvlak vermenigvuldigd met de halve hoogte. Dezelfde uitkomst verkrijgt men door den driehoek ABD tot grondvlak en den afstand der evenwijdige ribbe CE tot hoogte te nemen. De gelijkheid dezer beide producten kan daarenboven met behulp der spherische driehoeksmeting gemakkelijk betoogd worden.

## §. 13.

Zij ABCDEF (Fig. 12) een ligchaam begrensd door twee evenwijdige driehoeken, ABC, DEF, een trapezium ADFC, en twee scheeve vierhoeken BADE, BCFE (*), zijnde daarenboven de ribbe

---

(*) Onder scheeven vierhoek verstaan wij hier en in het vervolg het scheeve oppervlak, beschreven door eene regte lijn, die zich beweegt langs twee overstaande en niet in hetzelfde vlak liggende zijden eens vierhoeks, en daarbij evenwijdig blijft aan een vlak, dat door eene der twee overige zijden evenwijdig aan de andere gebragt is. Volgens eene bekende eigenschap verkrijgt men dan hetzelfde oppervlak, welke twee tegenoverstaande zijden des vierhoeks, hierbij tot rigtlijnen aangenomen worden, waaruit volgt, dat ook de doorsneden dg en ef (Fig. 12) regte lijnen zullen zijn. Zie onder anderen Le Roy, *Analyse appliquée à la Géometrie à trois dimensions*, 2 édit., pag. 118.

BE evenwijdig aan het vlak des trapeziums. Snijden wij het ligchaam door eenig vlak abc evenwijdig aan en op den afstand $x$ van het bovenvlak, dan is Da : DA $=$ Fc : FC $= x : h$. Stellende nu AC $= a$, DF $= b$, dan is blijkbaar ac $= b + \frac{x}{h}(a - b)$; en aangezien de driehoeken ABC, abc, en DEF gelijke hoogten hebben, zoo volgt hieruit de evenredigheid

$$Y : B : G = b + \frac{x}{h}(a - b) : b : a.$$

De functie $Y$ is hier wederom van den eersten graad; voor $x = \frac{1}{2}h$ wordt $Y = M$, dus is $M = \frac{a+b}{2b}.B$, of omdat $G = \frac{a}{b}.B$ is, $M = \frac{1}{2}(B + G)$. Derhalve komt er voor den inhoud

$$V = \tfrac{1}{6}h\{B + 2(B + G) + G\} = \tfrac{1}{2}h(B + G).$$

Men vindt dien inhoud alzoo door de halve som van grond- en bovenvlakken met de hoogte te vermenigvuldigen.

Het trapezium ADFC tot grondvlak nemende, geeft elke evenwijdige doorsnede defg wederom een trapezium van gelijke hoogte, zoo dat men heeft

$$Y : G = \text{de} + \text{fg} : \text{DF} + \text{AC}.$$

Is nu die doorsnede op den afstand $x$ van de evenwijdige ribbe BE genomen, dan ziet men terstond in, dat $Y$ wederom eene functie van den eersten graad wordt. Voor $x = \frac{1}{2}h$, is de $= \frac{1}{2}$DF en fg $= \frac{1}{2}$AC, dus $M = \frac{1}{2}G$ en $B = 0$, waardoor men verkrijgt

$$V = \tfrac{1}{6}h\{G + 2G\} = \tfrac{1}{2}Gh.$$

De inhoud van dat ligchaam wordt dus tevens gevonden, door den inhoud van het trapezium met den halven afstand der evenwijdige ribbe BE te vermenigvuldigen.

## § 14.

Zij AG (Fig. 13) een ligchaam, begrensd door vijf trapezia AC, AF, BG, CH, AH, en eenen scheeven vierhoek EFGH, zoodanig dat de vier opstaande ribben loodregt op het grondvlak AC staan. Men noeme deze lijnen, gaande door de punten A, B, C, D, respectievelijk $a$, $b$, $c$, $d$; wijders de evenwijdige zijden AD, BC, $m$, $n$; en $h$ derzelver afstand of de hoogte van het trapezium ABCD. Snijden wij het ligchaam door een vlak abcd evenwijdig aan en op

een' afstand $x$ van het vlak AEDH. Deze doorsnede zal insgelijks een trapezium zijn, waarvan elk der evenwijdige zijden, even als de bazis $ad$ door eene functie van $x$ van den eersten graad uitgedrukt wordt. De inhoud $Y$ der doorsnede zal gevolgelijk eene functie van den tweeden graad zijn. Men heeft dus, het trapezium AH tot grondvlak nemende, voor dat ligchaam insgelijks de formule $V = \frac{1}{6} h \{B + 4M + G\}$,

waarin $G = \frac{1}{2} m (a + d)$, $B = \frac{1}{2} n (b + c)$

en $M = \frac{1}{2} (m + n) \{\frac{1}{2} (a + b) + \frac{1}{2} (c + d)\}$ is.

Derhalve

$$V = \tfrac{1}{12} h \{m (a + d) + n (b + c) + (m + n)(a + b + c + d)\},$$

welke uitkomst volkomen overeenstemt met die, welke door de integraal-rekening verkregen wordt (*).

Gaat het trapezium in een' regthoek over, zoodat $m = n$ wordt, alsdan heeft men

$$V = \tfrac{1}{4} hm \times (a + b + c + d).$$

In dat bijzonder geval is dus de inhoud van het ligchaam gelijk aan het grondvlak vermenigvuldigd met een vierde van de som der vier opstaande ribben.

## § 15.

Er bestaan nog vele andere meer zamengestelde, door scheeve vierhoeken begrensde ligchamen, waarvan men zich, door onthinding in andere meer eenvoudige, gemakkelijk overtuigen kan, dat zij mede in de toepassing der formule ($\alpha$) vallen. Het zal voldoende zijn de navolgende voorbeelden hier aan te voeren.

Fig. 14 stelt een ligchaam voor, begrensd door twee evenwijdige driehoeken ABC, DEF, een parallelogram ABED, en twee scheeve vierhoeken BEFC, ADFC. Trekkende Ff evenwijdig aan BE, en uit f de lijnen fA, fB, fC, dan laat zich het ligchaam verdeelen in drie andere van gelijke hoogte, namelijk een driehoekig prisma, en twee conoïdische ligchamen reeds hiervoren (§ 12) behandeld. De formule ($\alpha$) voor elk dezer ligchamen afzonderlijk geldende, zal dus ook op het gansche ligchaam toepasselijk zijn, en men leidt hieruit gemakkelijk af, dat zijn inhoud gelijk is aan het product van de halve som der grond- en bovenvlakken met de hoogte.

(*) Zie I. R. Schmidt, *Differ. en integr. rekening*, 2e druk, bladz. 387.

§ 16.

Het wigvormig ligchaam in Fig. 15 voorgesteld en begrensd door het vierhoekig grondvlak ABCD het parallelogram BCEF, de driehoeken ABE, DCF, en den scheeven vierhoek AEFD, verkeert in hetzelfde geval. Immers blijkt genoegzaam uit de inzage der figuur, dat het ligchaam verdeeld kan worden in een driehoekig prisma, eene driehoekige piramide, en eene conoïde door het scheeve oppervlak begrensd. De inhoud laat zich dus uitdrukken door de formule

$$V = \tfrac{1}{6}h\{4M + G\}.$$

Om de waarde van $M$ te vinden, deele men de zijden AB, CD des grondvlaks midden door in a en d, dan zal de vierhoek aBCd de grootte van $M$ voorstellen. Trekkende nog de lijnen ag, dg naar het midden g van CG, dan heeft men:

*parallelogr.* Ca $=$ ½ *parallelogr.* CA,

*drieh.* agd $=$ ½ *drieh.* AGD, *drieh.* Cgd $=$ ¼ *drieh.* CGD,

waaruit volgt $M = \tfrac{1}{2}G - \tfrac{1}{4}$ *drieh.* CGD. Den inhoud van dezen laatsten driehoek $= I$ stellende, heeft men, volgens de vorige formule,

$$V = \tfrac{1}{2}h\{G - \tfrac{1}{3}I\}.$$

Zij nog AB $= p$, CD $= q$, *hoek* BAD $= \alpha$, *hoek* ADC $= \beta$, dan kan de inhoud ook aldus uitgedrukt worden:

$$V = \tfrac{1}{2}h\{G - \tfrac{1}{6}pq\ Sin.\ (\alpha + \beta)\}.$$

§ 17.

Zij AF (Fig. 16) een ligchaam begrensd door twee evenwijdige driehoeken ABC, DEF, en drie scheeve vierhoeken ABED, BCFE, ADFC. Men trekke uit de hoekpunten des bovenvlaks drie evenwijdige lijnen Dd, Ee en Ff tot op het grondvlak, en vereenige vervolgens de punten d, e en f, zoo onderling als met de drie hoekpunten A, B, C; dan laat zich het ligchaam verdeelen in vier andere, te weten: een driehoekig prisma en drie wigvormige ligchamen van dezelfde soort als die welker inhoud reeds in § 16 onderzocht is. Elk dezer ligchamen alzoo in de toepassing der formule ($\alpha$) vallende, zal men voor het geheele ligchaam, even als voor eene gewone afgeknotte driehoekige piramide, mogen stellen

$$V = \tfrac{1}{6}h\{G + B + 4M\},$$

waarbij nu eeniglijk overig blijft de waarde van $M$ uit de gegevens te berekenen.

## § 18.

Beschouwen wij nog een ligchaam, welks grond- en bovenvlakken twee regthoeken zijn, loodregt staande op de lijn, die hunne middelpunten vereenigt, doch waarvan de overeenkomstige zijden eenen zekeren hoek met elkander vormen. Zij ABCD (Fig. 17) het grondvlak, O zijn middelpunt, abcd de projectië van het bovenvlak, $\phi$ de hoek tusschen de zijden AB en ab begrepen. De vier overige zijvlakken van het ligchaam zijn scheeve vierhoeken, welker projectiën op het grondvlak door de figuur aangewezen worden. Nu kunnen wij het ligchaam op de wijze van Fig. 16 verdeelen in een regthoekig prisma, tot grondvlak hebbende abcd, en in vier aangrenzende wigvormige ligchamen. Stellende dan AB $= a$, BC $= b$. ab $= a'$, bc $= b'$, Aa $=$ Cc $= p$, Bb $=$ Dd $= q$, voorts *hoek* aAB $= \alpha$, *hoek* bBA $= \beta$, den inhoud der vierhoeken ABba $=$ CDdc $= I$, en dien der vierhoeken BCcb $=$ ADda $= I'$, zoo zal, ingevolge het gevondene in § 16, de som van de inhouden der vier wigvormige ligchamen tot waarde hebben

$$2 \times \tfrac{1}{3}h \left\{I + I' - \tfrac{1}{2}pq\ Sin.\ (\alpha + \beta)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{3}h \left\{ab - a'b' - \tfrac{2}{3}pq\ Sin.\ (\alpha + \beta)\right\}.$$

Hierbij optellende den inhoud $a'b'h$ van het inwendige regthoekige prisma, dat abcd tot grondvlak heeft, zoo verkrijgt men voor den inhoud des gegeven ligchaams

$$V = \tfrac{1}{3}h \left\{ab + a'b' - \tfrac{1}{3}pq\ Sin.\ (\alpha + \beta)\right\}.$$

Er blijft thans slechts overig den tweeden term in functie der bekenden $a$, $b$, $a'$, $b'$ en $\phi$ uit te drukken, hetgeen aldus geschieden kan.

Uit de figuur zelve laat zich het navolgende stelsel van vergelijkingen opmaken:

$$q\ Cos.\ \beta + p\ Cos.\ \alpha = a - a'\ Cos.\phi,$$
$$q\ Sin.\ \beta + p\ Sin.\ \alpha = b - b'\ Cos.\phi,$$
$$q\ Sin.\ \beta - p\ Sin.\ \alpha = a'\ Sin.\phi,$$
$$q\ Cos.\ \beta - p\ Cos.\ \alpha = -\ b'\ Sin.\phi;$$

waaruit verder volgt, door vermenigvuldiging

$$q^2\ Sin.\beta\ Cos.\beta + p^2\ Sin.\alpha\ Cos.\alpha + pq\ Sin.(\alpha + \beta)$$
$$= ab - (ab' + a'b)\ Cos.\phi + a'b'\ Cos.^2\phi,$$
$$q^2\ Sin.\beta\ Cos.\beta + p^2\ Sin.\alpha\ Cos.\alpha - pq\ Sin.(\alpha + \beta)$$
$$= -\ a'b'\ Sin.^2\phi,$$

en door aftrekking

$$2pq\ Sin.(\alpha+\beta)=ab+a'b'-(ab'+a'b)\ Cos.\phi.$$

Derhalve is

$$V=\tfrac{1}{2}h\left\{ab+a'b'-\tfrac{1}{3}(ab+a'b')+\tfrac{1}{3}(ab'+a'b)\ Cos.\phi\right\},$$

of $$V=\tfrac{1}{6}h\left\{2ab+2a'b'+(a'b+ab')\ Cos.\ \phi\right\}.$$

Voor $\phi=0$, vindt men

$$V=\tfrac{1}{6}h\left\{2(ab+a'b')+a'b+ab'\right\}=\tfrac{1}{6}h\left\{(2a+a')b+(2a'+a)b'\right\},$$

hetwelk, zoo als het behoort, met de uitkomst van § 9 volkomen overeenstemt.

Voor $\phi=90°$, komt er

$$V=\tfrac{1}{6}h\left\{2ab+2a'b'\right\}=\tfrac{1}{3}h\left\{ab+a'b\right\}.$$

Bij dezen stand van het bovenvlak loopen zijne zijden wederom evenwijdig aan die van het grondvlak. De zijvlakken blijven echter scheeve vierhoeken, en uit dien hoofde is de laatste uitkomst verschillend van die, welke men verkrijgt door in § 9 $a'$ en $b'$ met elkander te verwisselen.

Het ligchaam welks inhoud wij thans in functie van den hoek $\phi$ gevonden hebben, kan beschouwd worden als dat van Fig. 6 in eenen verwrongen toestand, waarbij het bovenvlak om zijn middelpunt gedraaid en een' hoek $\phi$ doorgeloopen heeft, terwijl de opstaande ribben regtlijnig gebleven zijn. Die inhoud zal, blijkens de voor $V$ gevondene functie, verminderen naargelang de hoek $\phi$ grooter wordt, en alzoo zijn minimum bereiken voor $\phi=180°$.

## § 19.

Ook in het meer algemeene geval waarin de evenwijdige grensvlakken veelhoeken van hetzelfde aantal zijden, en de overige zijvlakken scheeve vierhoeken zijn, zal men de formule ($\alpha$) van toepassing kunnen maken, dewijl het ligchaam, door het verdeelen dezer veelhoeken in driehoeken, in even zoo vele andere ligchamen verdeeld kan worden, die door driehoekige grond- en bovenvlakken en scheeve vierhoeken begrensd zijn, en die elk in het bijzonder in het geval van § 17 verkeeren.

Het is echter niet noodzakelijk dat de beide veelhoeken, welke tot grond- en bovenvlakken strekken, hetzelfde aantal zijden hebben. Onderstellende dat er in het bovenvlak $n$ zijden minder zijn dan in het grondvlak, dan zullen er $n$ scheeve vierhoeken in driehoeken

overgaan. Men geraakt alzoo tot deze meer algemeene uitkomst. *De inhoud van elk ligchaam, tot evenwijdige grond- en bovenvlakken hebbende twee veelhoeken van een willekeurig aantal zijden, en overigens begrensd door driehoeken, vlakke en scheeve vierhoeken, kan berekend worden door de formule*

$$V = \tfrac{1}{6}h\,\{B + 4M + G\}.$$

## § 20.

Om van deze soort van ligchamen insgelijks een enkel voorbeeld te geven, stelle men zich een ligchaam voor tot grondvlak hebbende een' regelmatigen zeshoek, tot evenwijdig bovenvlak een' gelijkzijdigen driehoek, en wijders tot grensvlakken drie gelijke vierkanten, en drie gelijke gelijkzijdige driehoeken, alle welke figuren op gelijke lijnen beschreven zijn. Laat AB $= a$ (Fig. 18) de zijde van het grondvlak of van den zeshoek ABCDEF voorstellen; en abc de projectie van het bovenvlak. Uithoofde van den symetrieken vorm van het ligchaam, worden de drie opstaande vierkanten geprojecteerd volgens de drie gelijke regthoeken Ab, Cc, Ea, en de drie opstaande gelijkzijdige driehoeken volgens drie gelijkbeenige driehoeken BCb, DEc en FAa, waarin elke hoek aan de bazis 30° is. Men stelle de inhouden van elk dezer regthoeken en driehoeken $= I$, $i$, en de hoogte des ligchaams $= h$. Uit de figuur volgt terstond

$$G = 6B = B + 3\,(I + i),\ \text{dus}\ I + i = \tfrac{5}{3}B.$$

Zij wijders A'B'C'D'E'F' de projectie van het middenvlak $M$, dan is *drieh.* B'C'b $= \tfrac{1}{4}i$, en *regth.* A'B'ab $= \tfrac{1}{2}I$; derhalve

$$M = B + 3\,(\tfrac{1}{2}I + \tfrac{1}{4}i) = B + \tfrac{3}{4}(I + i) + \tfrac{3}{4}I = B + \tfrac{5}{4}B + \tfrac{3}{4}I,$$

of

$$4M = 9B + 3I.$$

Maar Bb $= \tfrac{1}{3}a\sqrt{3}$, $I = \tfrac{1}{3}a^2\sqrt{3}$ en $B = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ zijnde, zoo heeft men $I = \tfrac{4}{3}B$, en dus $4M = 13B$. Derhalve

$$V = \tfrac{1}{6}h\,\{B + 13B + 6B\} = \tfrac{10}{3}Bh = \tfrac{5}{6}a^2h\sqrt{3},$$

of, omdat $h = \sqrt{(a^2 - \tfrac{1}{3}a^2)} = a\sqrt{\tfrac{2}{3}}$ is,

$$V = \tfrac{5}{6}a^3\sqrt{2}.$$

## § 21.

Beschouwen wij nog het geval waarin het ligchaam tot grond-

vlak heeft een' willekeurigen veelhoek ABCD....(Fig. 19), en waarbij het bovenvlak in eene regte lijn A'B' overgaat, die gelijk en evenwijdig is aan eene der zijden AB des grondvlaks. Laten C', D'.... de snijdingspunten aanwijzen van die lijn A'B' met vlakken gaande door de hoekpunten C, D.... evenwijdig aan eenig willekeurig vlak door de ribbe BB' gebragt, en nemen wij tot grensvlakken aan, het parallelogram AB', en de scheeve vierhoeken BCC'B', CDD'C'.... Zij verder abcd.... de doorsnede ter halver hoogte, dan is het gemakkelijk te bewijzen, dat men zal hebben $M = \frac{1}{2}G$. Immers, trekkende uit C', D'.... de lijnen C'E, D'F...., evenwijdig aan BB', en snijdende ab in de punten e, f...., en uit c, d...., de lijnen cc', dd'...., mede evenwijdig aan BB', dan zullen de veelhoeken Bc'd'...., bcd...., gelijk en gelijkvormig wezen. Daar wijders Ec' $= \frac{1}{2}$EC, Fd' $= \frac{1}{2}$FD, enz. is, zoo vindt men hieruit terstond $M = \frac{1}{2}G$. De inhoud van het ligchaam heeft dus tot waarde

$$V = \tfrac{1}{6}h\,\{G + 2G\} = \tfrac{1}{2}Gh.$$

Deze uitkomst, onafhankelijk zijnde van het aantal zijden des grondvlaks, zoo zal de voorgaande formule eveneens gelden, bijaldien de veelhoek in eene willekeurige kromme lijn, en het ligchaam alzoo in eene conoïde overgaat. De inhoud eener conoïde, door een parallelogram begrensd, is derhalve gelijk aan het kromlijnige grondvlak vermenigvuldigd met de halve hoogte.

## § 22.

Het voorgaande zal, naar wij vertrouwen, voldoende zijn om te doen zien welke uitgestrekte toepassing in de stereometrie te maken is van de formule

$$V = \tfrac{1}{6}h\,\{B + 4M + G\}.$$

Wij zullen thans overgaan om op gelijke wijze aan te toonen, dat er ook eene groote verscheidenheid van ligchamen bestaat, welker zwaartepunt zich door ééne en dezelfde formule laat bepalen.

Onderstellen wij wederom dat de ligchamen door twee evenwijdige vlakken op den afstand $h$ begrensd zijn. Zij $Y = f(x)$ de inhoud eener evenwijdige doorsnede, genomen op den afstand $x$ van het bovenvlak, dan zal de afstand $X$ van het zwaartepunt des ligchaams tot dit laatste vlak, naar de bekende gronden der

statica, uitgedrukt worden door de formule

$$X = \frac{\int_0^h xY\partial x}{\int_0^h Y\partial x}.$$

Is nu $Y$ van den vorm $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, dan wordt $xY$ eene rationale functie van den derden graad, en men zal derhalve, ingevolge het in § 2 betoogde, mogen stellen

$$\int_x^{x+h} xY\partial x = \tfrac{1}{6}h\left\{xf(x)+4(x+\tfrac{1}{2}h)f(x+\tfrac{1}{2}h)+(x+h)f(x+h)\right\}$$

en dus

$$\int_0^h xY\partial x = \tfrac{1}{6}h\left\{2hf(\tfrac{1}{2}h) + hf(h)\right\} = \tfrac{1}{6}h^2\left\{2M + G\right\}.$$

Voorts is $\int_0^h Y\partial x = V = \frac{1}{6}h\left\{B + 4M + G\right\}$,

derhalve $$X = h\left\{\frac{2M + G}{B + 4M + G}\right\} \dots\dots (\beta)$$

Deze formule is nu blijkbaar van toepassing op *al* de hiervoren door ons beschouwde ligchamen, als zijnde $Y$ voor elk derzelve eene rationale functie van den eersten of tweeden graad.

Rekent men den afstand $X$ van een vlak evenwijdig aan het bovenvlak en op den afstand $\alpha$ boven hetzelve gelegen, dan heeft men meer algemeen

$$X = \frac{\alpha B + (4\alpha + 2h)\,M + (\alpha + h)\,G}{B + 4M + G} \dots (\beta')$$

De formules $(\beta)$ en $(\beta')$ laten zich beiden even gemakkelijk in het geheugen prenten. Men zal namelijk opmerken, dat de termen van den teller uit die van den noemer afgeleid worden, door deze respectievelijk te vermenigvuldigen met de afstanden der vlakken $B$, $M$, $G$ tot het vlak van telling.

Bij het gebruik der laatste formule, zijn die afstanden

$$\alpha,\ \alpha + \tfrac{1}{2}h,\ \alpha + h,$$

en bij het gebruik der eerste

$$0,\ \tfrac{1}{2}h,\ h.$$

Indien $G > B$ is, dan ligt het zwaartepunt beneden de helft der hoogte, en wel op eenen afstand

$$X' = X - \tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{2}h\left\{\frac{G - B}{B + 4M + G}\right\} = \frac{h^2}{12} \times \frac{G - B}{V} \dots (\gamma)$$

De plaats van het zwaartepunt is echter door eene der voorgaande formules niet volkomen bepaald, vermits men daarenboven eene lijn behoort te kennen, waarop het zwaartepunt gelegen is; hetgeen bij velen der hiervoren vermelde ligchamen met weinig moeite te vinden is.

§ 23.

Voor prismatische ligchamen is $B = G = M$, dus $X = h . \frac{3G}{6G} = \frac{1}{2}h$.

Voor piramiden is $B = 0$ en $M = \frac{1}{4}G$, dus $X = h . \frac{\frac{3}{2}G}{2G} = \frac{3}{4}h$.

Voor eene afgeknotte piramide heeft men, de gelijkstandige zijden van grond- en bovenvlak wederom $m$ en $m'$ noemende,

$$G = \frac{m^2}{m'^2} B, \quad M = \left\{\frac{m + m'}{2m'}\right\}^2 B,$$

$$\text{dus } X = \tfrac{1}{4}h \left\{\frac{(m + m')^2 + 2m^2}{m^2 + m'^2 + (m + m')^2}\right\} = \tfrac{1}{4}h \left\{\frac{3m^2 + 2m'm + m'^2}{m^2 + mm' + m'^2}\right\},$$

of

$$X = \tfrac{1}{4}h \left\{\frac{B + 2\sqrt{BG} + 3G}{B + \sqrt{BG} + G}\right\}$$

en

$$X' = \tfrac{1}{4}h \left\{\frac{G - B}{B + \sqrt{BG} + G}\right\}.$$

Voor het ligchaam in Fig. (6) voorgesteld, heeft men (§ 9).

$$B = a'b', \quad G = ab, \quad M = \tfrac{1}{4}(a + a')(b + b'),$$

dus

$$X' = \tfrac{1}{2}h \left\{\frac{ab - a'b'}{(2a + a')\,b + (2a' + a)\,b'}\right\}.$$

§ 24.

Verandert het bovenvlak in eene regte lijn evenwijdig aan het grondvlak, dan herleidt zich de formule ($\beta$) tot deze:

$$X = h . \left\{\frac{2M + G}{4M + G}\right\} = \tfrac{1}{2}h \left\{1 + \frac{G}{4M + G}\right\},$$

terwijl de afstand van het zwaartepunt tot het grondvlak zal uitgedrukt worden door de formule

$$X_0 = h . \frac{2M}{4M + G}.$$

Nemen wij tot voorbeeld het afgeknotte driehoekige prisma (§ 9). Hier is $G = \frac{1}{2}c\,(a + b)$ en $4M = \frac{1}{2}c\,(a + b + 2a')$. Dus

$$X_0 = \tfrac{1}{2}h \left\{\frac{a + b + 2a'}{a + b + a'}\right\} = \tfrac{1}{2}h \left\{1 + \frac{a'}{a + b + a'}\right\};$$

en op dezelfde wijze laat zich de afstand van het zwaartepunt tot elk der overige zijvlakken bepalen.

Voor de conoïde van Fig. 11 (§ 12) heeft men $G = 2M$, dus $X_0 = \frac{1}{3}h$. Bij deze soort van ligchamen ligt alzoo het zwaartepunt op een derde der hoogte boven het grondvlak.

Voor het ligchaam in Fig. 12 voorgesteld is, wanneer men ABC tot grondvlak neemt (§ 13), $M = \frac{1}{2}(B + G)$; derhalve

$$X' = \tfrac{1}{2}h \left\{\frac{G - B}{G + 2(B + G) + B}\right\} = \tfrac{1}{6}h \left\{\frac{G - B}{G + B}\right\}$$

en $$X = X' + \tfrac{1}{2}h = \tfrac{1}{2}h \left\{1 + \tfrac{1}{3} \frac{G - B}{G + B}\right\}.$$

Nemende daarentegen het trapezium ACFD tot grondvlak aan, dan heeft men $B = 0$ en $M = \frac{1}{2}G$; derhalve

$$X = h \left\{\frac{2M + G}{4M + G}\right\} = \tfrac{2}{3}h.$$

Het zwaartepunt ligt dus tevens op $\frac{2}{3}$ der hoogte van de ribbe BE boven het grondvlak.

Voor het ligchaam in Fig. 18 voorgesteld, heeft men (§ 20)

$$G = 6B,\quad M = \tfrac{13}{4}B,\quad B + 4M + G = 20B,$$

dus $$X' = \tfrac{1}{8}h.$$

Het zwaartepunt ligt derhalve op $\frac{5}{8}$ der hoogte boven het grondvlak.

## § 25.

Daar het zwaartepunt bij elk omwentelingsligchaam op de as zelve gelegen is, zal de juiste ligging van dat punt eeniglijk met behulp der formule ($\beta$) kunnen bepaald worden, zoodra de vergelijking der omwentelende kromme begrepen is in den vorm

$$y = \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}.$$

Voor eene spherische schijf is reeds vroeger (§ 5) gevonden

$$B + 4M + G = 3(B + G) + h^2\pi;$$

derhalve is hier

$$X' = \tfrac{1}{2}h \left\{\frac{G - B}{3(B + G) + h^2\pi}\right\};$$

of, stellende $G = R^2\pi$ en $B = R'^2\pi$,

$$X' = \tfrac{1}{2}h \left\{\frac{R^2 - R'^2}{3(R^2 + R'^2) + h^2}\right\}.$$

Is $R' = 0$, en dus $R^2 = 2rh - h^2$, dan komt er, voor den afstand van het zwaartepunt van een spherisch segment beneden de halve hoogte,

$$X' = \tfrac{1}{4}h \left\{\frac{2r - h}{3r - h}\right\}.$$

Zij $h = r$, dan is $X' = \tfrac{1}{8}r$. Bij een' halven bol ligt derhalve het zwaartepunt op $\tfrac{3}{8}$ van den straal boven het grondvlak; welke uitkomst ook onmiddelijk afgeleid kan worden uit de formule

$$X_0 = h.\frac{2M}{4M + G},$$

waarin dan $G = r^2\pi$ en $M = \tfrac{3}{4}r^2\pi = \tfrac{3}{4}G$ is.

Volgens het gevondene in § 6, heeft men voor eene schijf eener elliptische paraboloïde, $M = \tfrac{1}{2}(B + G)$, dus

$$X = \tfrac{1}{3}h\,\frac{B + 2G}{B + G} = \tfrac{1}{3}h\left\{1 + \frac{G}{B + G}\right\},$$

en omdat $G : B = \alpha : \alpha + h$, komt er

$$X = \tfrac{1}{3}h\left\{1 + \frac{\alpha}{2\alpha + h}\right\}.$$

Gaat de schijf in een segment over, dan wordt $\alpha = 0$, en dus

$$X = \tfrac{1}{3}h;$$

het zwaartepunt ligt dus op $\tfrac{2}{3}$ der hoogte gerekend van den top.

Voor eene schijf eener ellipsoïde heeft men, ingevolge § 6,

$$X' = \tfrac{1}{2}h\left\{\frac{G - B}{3(G + B) + \frac{bc}{a^2}h^2\pi}\right\}.$$

Voor een elliptisch segment wordt $B = 0$ en $G = \frac{bc}{a^2}(2ah - h^2)\pi$,

waaruit volgt, even als voor een spherisch segment gevonden is,

$$X' = \tfrac{1}{4}h\left\{\frac{2a - h}{3a - h}\right\}.$$

Bij eene halve ellipsoïde is dan het zwaartepunt, even als bij eenen halven bol, op $\tfrac{3}{8}$ der hoogte boven het grondvlak gelegen.

§ 26.

Het is gemakkelijk in te zien, dat de formule ($\beta$) ook hare toepassing vindt bij uitgeholde ligchamen, zoodra zulks zoo wel met het geheele ligchaam als met het uitgeboorde gedeelte het geval is.

Beschouwen wij, even als in § 11, het geval van een' halven bol door een cilinder concentrisch uitgehold. Men heeft alsdan $B = 0$, $G = h^2\pi$, $M = \frac{3}{4}h^2\pi = \frac{3}{4}G$ en derhalve

$$X = h\left\{\frac{2M + G}{4M + G}\right\} = \frac{5}{8}h;$$

het zwaartepunt is dus gelegen op $\frac{5}{8}$ der hoogte boven het grondvlak.

Voor een spherisch of elliptisch segment, dat door een' kegel van hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte uitgeboord is, zal de formule $(\beta)$, waarin nu gelijktijdig $B = 0$ en $G = 0$ is, terstond doen zien, dat het zwaartepunt van het overblijvende ligchaam op de halve hoogte gelegen is.

## § 27.

Om insgelijks een paar voorbeelden te kiezen uit de door scheeve oppervlakken begrensde ligchamen, zoo strekke daartoe in de eerste plaats het ligchaam in Fig. 13 voorgesteld.

Alsdan is (§ 14)

$B = \frac{1}{2}n(b + c)$, $G = \frac{1}{2}m(a + d)$ en $M = \frac{1}{8}(m + n)(a + b + c + d)$;

dus komt er

$$X = \frac{1}{2}h\left\{\frac{(m + n)(a + b + c + d) + 2m(a + d)}{m(a + d) + n(b + c) + (m + n)(a + b + c + d)}\right\}$$

voor den afstand van het zwaartepunt tot het vlak BCFG.

Is $m = n$, dan verandert de voorgaande uitkomst in

$$X = \frac{1}{2}h\left\{1 + \frac{(a + d) - (b + c)}{3(a + b + c + d)}\right\}.$$

Nemen wij in de tweede plaats het ligchaam in § 18 behandeld (Fig. 17). Volgens het aldaar gevondene verkrijgt men, met toepassing der formule $X' = \frac{h^2}{12} \times \frac{G - B}{V}$, voor den afstand van het zwaartepunt beneden de halve hoogte

$$X' = \frac{1}{2}h\left\{\frac{ab - a'b'}{2ab + 2a'b' + (a'b + ab')\,Cos.\,\phi}\right\}.$$

Indien $\phi = 0$ is, verandert deze uitkomst in

$$X' = \frac{1}{2}h\left\{\frac{ab - a'b'}{2(ab + a'b') + ab' + a'b}\right\},$$

even als reeds vroeger (§ 23) gevonden is.

Voor $\phi = 90°$, komt er

$$X' = \tfrac{1}{4}h\left(\frac{ab - a'b'}{ab + a'b'}\right).$$

Bij de conoïdische ligchamen van den vorm in § 12 beschouwd, $M = \frac{1}{2}G$ zijnde, zoo is $X = \frac{2}{3}h$.

§ 28.

Ten slotte dezer toepassingen zal het niet overbodig te achten zijn, hier nog bij te voegen, dat de beide formules

$$V = \tfrac{1}{6}h\{B + 4M + G\}$$
$$X = h\left\{\frac{2M + G}{B + 4M + G}\right\}$$

tevens als benaderingsformulen kunnen gebruikt worden, om met eenen voldoenden graad van naauwkeurigheid den inhoud en het zwaartepunt te bepalen van elk willekeurig ligchaam, dat tusschen twee evenwijdige vlakken besloten is.

Te dien einde verdeele men den afstand $h$ dezer beide grensvlakken in een even aantal $n$ gelijke deelen $\alpha$, zoodat $\alpha = \frac{h}{n}$ is, en noeme de inhouden der door de opvolgende deelpunten gebragte evenwijdige doorsneden, te beginnen met het voorste grensvlak, respectievelijk $I_0$, $I_1$, $I_2 \ldots I_n$.

Nu zal de inhoud der schijf, begrepen tusschen de vlakken $I_0$ en $I_2$ op den afstand $2\alpha$ van elkander verwijderd, bij benadering kunnen uitgedrukt worden door

$$\tfrac{1}{3}\alpha\{I_0 + 4I_1 + I_2\};$$

die eener volgende schijf, begrepen tusschen de vlakken $I_2$ en $I_4$, door

$$\tfrac{1}{3}\alpha\{I_2 + 4I_3 + I_4\},$$

en op gelijke wijze voortgaande, vindt men eindelijk voor den inhoud der laatste schijf

$$\tfrac{1}{3}\alpha\{I_{n-2} + 4I_{n-1} + I_n\}.$$

De som dezer partiële inhouden geeft alzoo voor den benaderden inhoud van het geheele ligchaam, de formule

$$V = \tfrac{1}{3}\alpha\{I_0 + 4I_1 + 2I_2 + 4I_3 + 2I_4 + \ldots 2I_{n-2} + 4I_{n-1} + I_n\}, \ldots (A)$$

welke, onder den navolgenden vorm geschreven

$$V = \tfrac{1}{3}\alpha\{I_0 + I_n + 2(I_2 + I_4 \ldots + I_{n-2}) + 4(I_1 + I_3 \ldots I_{n-1})\} \ldots (B)$$

den bekenden regel van Simpson voor de inhoudsberekening der ligchamen oplevert.

Men neme namelijk de som van de inhouden der beide evenwijdige grensvlakken, telle daarbij op het *dubbel* van de som der inhouden van de doorsneden, gaande door de deelpunten van *evene* rangorde, en voorts nog het *viervoud* van die der doorsneden, gaande door de deelpunten van *onevene* rangorde. Het product dezer som, met een derde van den afstand der opvolgende doorsneden, zal den inhoud van het ligchaam opleveren; en zulks met des te hoogeren graad van naauwkeurigheid, naarmate $n$ of het aantal doorsneden grooter wordt genomen.

Bijaldien de beide grensvlakken vervallen, neemt de laatste formule dezen meer eenvoudigen vorm aan:

$$V = \tfrac{1}{3}\alpha\left\{I_2 + I_4 + I_{n-2} + 2(I_1 + I_3 + \ldots I_{n-1})\right\}.$$

Ontstaat het ligchaam uit de omwenteling eener kromme om de as der abscissen, en noemt men de ordinaten tot de deelpunten der as behoorende, achtervolgens $y_0$, $y_1$, $y_2 \ldots y_n$, dan gaat de algemeene formule (B) over in

$$V = \tfrac{1}{3}\pi\alpha\left\{y_0^2 + y_n^2 + 2(y_2^2 + y_4^2 + \ldots y_{n-2}^2) + 4(y_1^2 + y_3^2 \ldots + y_{n-1}^2)\right\}. \quad (B')$$

## § 29.

Door eene gelijksoortige handelwijze laat zich ook het zwaartepunt van het ligchaam bepalen. Noemende wederom $X$ den afstand van dat punt tot het voorvlak $I_0$, dan is $VX$ gelijk aan de som der momenten der hiervoren beschouwde deelen des ligchaams ten aanzien van hetzelfde vlak.

Volgens de formule $X = h\left\{\dfrac{2M + G}{B + 4M + G}\right\}$, heeft men, voor het moment der eerste schijf begrepen tusschen $I_0$ en $I_2$,

$$\tfrac{1}{3}\alpha^2\{2I_1 + I_2\} = \tfrac{1}{3}\alpha^2\{0.I_0 + 4.I_1 + 2I_2\};$$

voor het moment der volgende schijf

$$\tfrac{1}{3}\alpha^2\{2I_2 + 3.4I_3 + 4I_4\};$$

en voor de overige schijven, achtervolgens:

$$\tfrac{1}{3}\alpha^2\{4I_4 + 5.4I_5 + 6I_6\},$$

$$\tfrac{1}{3}\alpha^2\{6I_6 + 7.4I_7 + 8I_8\},$$

*enz., enz.,*

$$\tfrac{1}{3}\alpha^2\{(n-2)I_{n-2} + (n-1).4I_{n-1} + nI_n\},$$

waaruit door optelling afgeleid wordt

$$VX = \tfrac{1}{3}\alpha^2\{4I_1 + 2.2I_2 + 3.4I_3 + 4.2I_4 + 5.4I_5 + \ldots (n-1)4I_{n-1} + nI_n\}$$

en wijders

$$X = \alpha \left\{ \frac{4I_1 + 2.2I_2 + 3.4I_3 + 4.2I_4 \ldots + (n-1)4I_{n-1} + nI_n}{I_0 + 4I_1 + 2I_2 + 4I_3 + 2I_4 \ldots + 4I_{n-1} + I_n} \right\} \ldots (C)$$

Het loopt terstond in het oog, dat de teller uit den noemer dezer breuk afgeleid wordt, door de termen van dezen laatsten respectivelijk te vermenigvuldigen met die der arithmetische reeks $0$, $\alpha$, $2\alpha \ldots n\alpha$, dat is met de afstanden der achtervolgende doorsneden tot het voorvlak $I_0$; en hieruit laat zich dus voor de praktijk een eenvoudige regel opmaken ter berekening van $X$, welke ook de gedaante van het ligchaam zij.

Bijaldien er geene platte grensvlakken bestaan, en dus $I_0 = I_n = 0$ is, verandert de vorige formule in de volgende:

$$X = \alpha \left\{ \frac{2I_1 + 2I_2 + 3.2I_3 + 4I_4 + \ldots + (n-1).2I_{n-1}}{I_0 + 2I_1 + I_2 + 2I_3 \ldots + 2I_{n-1}} \right\}, \ldots (D)$$

waarin de teller op gelijke wijze als in de formule (C) uit den noemer wordt afgeleid.

Voor een omwentelingsligchaam gelden dezelfde formulen, met verandering slechts van $I$ in $y^2\pi$, even als in § 28.

## § 30.

Men zal gemakkelijk inzien dat, wanneer men in de formulen (A) en (C), $I$ overal door $y$ vervangt, de eerste alsdan bij benadering den inhoud doet kennen eener willekeurige vlakke kromme, besloten tusschen de ordinaten $y_0$, $y_n$ op den afstand $h$, en de as der abscissen; terwijl de tweede den afstand van het zwaartepunt dezer figuur tot de ordinaat $y_0$, en dus ook tot de as der ordinaten leert bepalen. De afstand van dat punt tot de as der abscissen laat zich thans met behulp van het theorema van Guldin mede bepalen. Stellende namelijk dien afstand $= Y$, dan geeft de vergelijking

$$2\pi Y \times Inh. = V,$$

$$Y = \frac{1}{2\pi} \times \frac{V}{Inh.},$$

zijnde $V$ de inhoud van het omwentelingsligchaam door de kromme voortgebragt. Men heeft gevolgelijk, op grond der formule (B'),

$$Y = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{y_0^2 + 4y_1^2 + 2y_2^2 + 4y_3^2 \ldots + 4y_{n-1}^2 + y_n^2}{y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ldots + 4y_{n-1} + y_n} \right\},$$

waardoor nu de ligging van het zwaartepunt des kromlijnigen inhouds volkomen bepaald is.

De formules (B) en (D) worden ook door EYTELWEIN, in het 1ste Deel zijner *Statiek fester Körper*, 2e druk, bladz. 202 en 203, ofschoon onder een minder algemeenen vorm, medegedeeld, en zijn aldaar uit andere gronden afgeleid.

---

## NASCHRIFT.

---

### § 31.

Nadat de voorgaande bijdrage reeds aangeboden en ter opname in de werken des Genootschaps bestemd was, ben ik, door de vriendelijkheid van een' mijner geachte medeleden den Heer L. J. ULMAN, opmerkzaam gemaakt geworden op een stuk, voorkomende in het *Archiv der Mathematik und Physik*, 10 TH., 3 HEFT, onder het opschrift: *Ueber einen allgemeinen Lehrsatz der Stereometrie*, medegedeeld door den uitgever Prof. J. A. GRÜNERT, en insgelijks ten doel hebbende, een betoog met eenige toepassingen te leveren der hiervoren behandelde formule voor de inhoudsberekening van tusschen twee evenwijdige vlakken begrensde ligchamen.

Uit het aangehaalde stuk, welks inhoud mij vroeger geheel onbekend was, is mij intusschen gebleken, dat het betoog des schrijvers niet alleen zeer verschillend van het mijne, en ook minder eenvoudig is, maar zich daarenboven eeniglijk bepaalt tot het geval, waarin de inhoud der doorsnede door eene rationale functie van den *tweeden* graad voorgesteld wordt. Ik heb hierbij tevens tot mijne bevreemding ontwaard, dat zulk een verdienstelijk wiskundige als Prof. GRÜNERT niet ingezien heeft, dat de formule evenzeer geldt, bijaldien de bedoelde functie tot den *derden* graad opklimt, en er in dat geval geene afzonderlijke uit meer termen bestaande formule gevorderd wordt; zoodat deze geleerde evenmin als de Heer A. BRIX te *Berlijn* (wien nogtans de

eer toekomt, de formule het eerst bekend gemaakt en op enkele ligchamen toegepast te hebben) er in geslaagd schijnt, de voorwaarde, waaraan de geldigheid der formule verbonden is, *naauwkeurig* te doen uitkomen (*).

Daar wijders de verhandeling van den Heer GRÜNERT geene toepassingen bevat op ligchamen door scheeve oppervlakken begrensd, en bovendien geene melding maakt van het bestaan eener gelijksoortige formule ter bepaling der ligging van het zwaartepunt, zoo vertrouwen wij, dat onze voorgaande bijdrage, ook na de bekendmaking der aangehaalde verhandeling, als geen' nutteloozen of overbodigen arbeid zal mogen beschouwd worden.

## § 32.

Wij behooren evenwel niet onopgemerkt te laten, dat de schrijver zijn betoog ook in zoodanigen vorm voorgedragen heeft, dat daarbij geene kennis der integraal-rekening ondersteld wordt; en zulks bepaaldelijk met het loffelijke doel, om de stelling in de onderhavige formule opgesloten, uithoofde van haar nut in het

(*) Zie hier intusschen hoedanig de schrijver over den arbeid des Heeren A. BRIX oordeelt. Na opgemerkt te hebben, dat het geschrift van den Heer LIGOWSKY ten aanzien der wiskundige strengheid veel te wenschen overlaat, en bij hetgeen eerstgenoemde reeds bekend gemaakt had, niets belangrijks gevoegd heeft; wijders, dat de Heer BRIX de formule niet algemeen betoogd, maar slechts bij wijze van inductie gevonden heeft, laat hij zich aldus uit:

*Auch scheint mir Herr* BRIX *den Satz noch nicht auf seinen wahren Ausdrück zurückgeführt und die eigentlichen Bedingungen, unter denen er allein gültig ist, nachgewiesen zu haben, was mir nothwendig zu seyn scheint, wenn der ware Werth und die wahre Bedeutung derselben, sowohl in theoretischer als auch in praktischer Bedeutung, gehörig hervorgehoben und in 's Licht gestellt werden soll. Ich werde mir daher erlauben diesen der Aufmerksamkeit gewis sehr werthen Gegenstand in der vorliegende Abhandlung einer ganz neuen Untersuchung zu unterwerfen, und in jeder Beziehung in sein gehöriges Licht zu stellen, namentlich auch den Satz auf seinen wahren Ausdrück zu bringen und die eigentliche Bedingung seiner Gültigkeit nach zu weisen suchen.*

Wij zouden echter bescheidenlijk van oordeel zijn, dat de aanmerkingen van Prof. GRÜNERT, in de aangehaalde regels vervat ten nadeele van den Heer BRIX, ook grootendeels op zijne eigene onderzoekingen konden toegepast worden.

werkdadige, ingang te doen vinden in het elementaire onderwijs der stereometrie, bijzonderlijk aan zoodanige inrigtingen, welker strekking meer van praktischen of technischen aard is. Doch ook in dat geval is de door hem ingeslagen weg, naar het ons voorkomt, geenszins de eenvoudigste; vooral niet, wanneer de inhoud der doorsnede door eene rationale functie van den *derden* graad uitgedrukt wordt. Moesten wij de bedoelde stelling in een elementair werk over de ligchaamsmeting opnemen, dan zouden wij haar aldus voordragen en bewijzen:

*Indien eenig ligchaam door twee evenwijdige platte vlakken van willekeurigen vorm begrensd is, en de inhoud eener evenwijdige doorsnede, genomen op eenigen afstand x van een dezer vlakken, uitgedrukt wordt door eene rationale eerste-, tweede- of derde-magtsfunctie van den afstand x, dan zal de inhoud van zoodanig ligchaam gevonden worden, door het zesde deel van de hoogte of van den afstand der beide grensvlakken, te vermenigvuldigen met de som van de inhouden dezer vlakken, vermeerderd met viermaal den inhoud eener evenwijdige doorsnede ter halver hoogte;* dat is: de inhouden van het grond-, boven- en middenvlak door $G$, $B$ en $M$, en de hoogte door $h$ voorstellende, dan zal men hebben

$$Inh. = V = \tfrac{1}{6} h \{B + G + 4M\}.$$

## § 33.

Laat, om zulks te betoogen, de hoogte $h$ in een aantal van $n$ gelijke deelen $\alpha$ verdeeld, en door elk der deelpunten eene loodregte doorsnede gebragt worden. Stellen wij den inhoud $Y$ eener doorsnede, op den afstand $x$, in het algemeen door $F(x)$ voor (*), dan kunnen de inhouden dezer $n - 1$ doorsneden achtervolgens aangewezen worden door

$$F(\alpha),\ F(2\alpha),\ F(3\alpha), \ldots F(n-1)\alpha,$$

en die der beide grensvlakken door $F(0)$, $F(n\alpha)$ of $F(h)$; zijnde hierbij $\alpha = \frac{h}{n}$.

(*) Het is hierbij onverschillig, of de afstand $x$ geteld worde van een der grensvlakken, dan wel van eenig punt *buiten* of *binnen* het ligchaam gelegen. Immers $F(x)$ verandert hierdoor niet van aard, en men kan altijd een dezer beide laatste gevallen tot het eerste terugbrengen,

Nu is de inhoud $V$ blijkbaar gelegen tusschen de som der inwendige prisma's, die de doorsneden $F(0)$, $F(\alpha)$, ... $F(n-1)\alpha$ tot grondvlakken en $\alpha$ tot hoogte hebben, en de som der uitwendige prisma's die de doorsneden $F(\alpha)$, $F(2\alpha)$, ... $F(n\alpha)$ tot grondvlakken en dezelfde hoogte $\alpha$ hebben. Men kan alzoo $V$ beschouwen als de limiet, waartoe elk der producten

$$\alpha\left\{F(0)+F(\alpha)+F(2\alpha)\ldots+F(n-1)\alpha\right\}\ldots\text{(a)}$$

$$\alpha\left\{F(\alpha)+F(2\alpha)+F(3\alpha)\ \ldots+F(n\alpha)\right\}\ldots\text{(b)}$$

meer en meer nadert, naarmate $\alpha$ kleiner of het aantal gelijke deelen $n$ grooter genomen wordt. Het komt er alzoo slechts op aan om de waarde dezer limiet te vinden, in de onderstelling dat men heeft

$$F(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3,$$

welke limiet alsdan evenzeer gelden zal voor de gevallen, waarin de coëfficiënten C, D, elk afzonderlijk of gelijktijdig nul worden.

Blijkbaar kan men hiertoe eene der beide uitdrukkingen, (a) of (b), naar welgevallen, gebruiken, dewijl zij elk in het bijzonder tot de bedoelde limiet naderen. Volgens de laatste heeft men voor den inhoud van het ligchaam

$$\begin{aligned}V = Lim.\,\frac{h}{n}\Big\{&A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3\\ &+ A + B.\,2\alpha + C\,(2\alpha)^2 + D\,(2\alpha)^3\\ &+ A + B.\,3\alpha + C\,(3\alpha)^2 + D\,(3\alpha)^3\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ A + B.\,n\alpha + C\,(n\alpha)^2 + D\,(n\alpha)^3\Big\}.\end{aligned}$$

Stellende, ter bekorting,

$$1 + 2 + 3\ldots + n = S(n),$$
$$1 + 2^2 + 3^2\ldots + n^2 = S(n^2),$$
$$1 + 2^3 + 3^3\ldots + n^3 = S(n^3),$$

zoo kan de voorgaande uitdrukking, na vervanging van $\alpha$ door $\frac{h}{n}$, ook aldus geschreven worden:

$$V = Lim.\,h\left\{A + B\frac{S(n)}{n^2}h + C\frac{S(n^2)}{n^3}h^2 + D\frac{S(n^3)}{n^4}h^3\right\}\ldots\text{(c)}$$

Om nu nog de limieten der breuken $\frac{S(n)}{n^2}$, $\frac{S(n^2)}{n^3}$, $\frac{S(n^3)}{n^4}$ te vinden, namelijk de waarden welke deze breuken verkrijgen in

de onderstelling van $n = \infty$, heeft men voor de eerste, zoo als bekend is,

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ dus } \frac{S(n)}{n^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

en $$Lim.\ S(n) = \tfrac{1}{2}.$$

Wil men de waarden van $S(n^2)$, $S(n^3)$ hier niet als bekend aannemen, zoo kan men stellen

$$S(n^2) = an^3 + bn^2 + cn,$$

waaruit onmiddellijk volgen zou

$$Lim.\ \frac{S(n^2)}{n^3} = a;$$

en om dan dezen coëfficiënt $a$ spoedig te bepalen, kan men aldus te werk gaan. Schrijvende $n - 1$ voor $n$, zoo heeft men

$$S(n^2) - S((n-1)^2) = n^2 = a(n^3 - (n-1)^3) + b(n^2 - (n-1)^2) + c,$$

in welke vergelijking men, bij de ontwikkeling van het tweede lid, eeniglijk zal te letten hebben op den coëfficiënt van $n^2$, vermits de overigen nul worden. Die vergelijking geeft dan terstond

$$n^2 = 3an^2,$$

en dus $$Lim.\ \frac{S(n^2)}{n^3} = a = \tfrac{1}{3}.$$

Op gelijke wijze stellende

$$S(n^3) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn,$$

heeft men achtervolgens:

$$Lim.\ \frac{S(n^3)}{n^4} = a,$$

$$S(n^3) - S((n-1)^3) = n^3 = a(n^4 - (n-1)^4) + enz.,$$

$$n^3 = 4an^3,$$

en dus $$Lim.\ \frac{S(n^3)}{n^4} = a = \tfrac{1}{4}.$$

Hierdoor geeft de formule (c) voor de juiste waarde van den inhoud, $V = h\left\{A + \tfrac{1}{2}Bh + \tfrac{1}{3}Ch^2 + \tfrac{1}{4}Dh^3\right\}$ . . . (d)

Nu is: $$F(0) = A,$$

$$F(\tfrac{1}{2}h) = A + \tfrac{1}{2}Bh + \tfrac{1}{4}Ch^2 + \tfrac{1}{8}Dh^3,$$

$$F(h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3,$$

waaruit afgeleid wordt

$$F(0) + 4F(\tfrac{1}{2}h) + F(h) = 6A + 3Bh + 2Ch^2 + \tfrac{3}{2}Dh^3,$$

of $$B + 4M + G = 6\{A + \tfrac{1}{2}Bh + \tfrac{1}{3}Ch^2 + \tfrac{1}{4}Dh^3\}.$$

Deze uitkomst met de formule (d) vergelijkende, vindt men onmiddellijk $$V = \tfrac{1}{6}h\{B + 4M + G\},$$
waardoor de stelling op eene elementaire wijze betoogd is.

## § 34.

Het laatste gedeelte van het voorgaande bewijs had ook, indien men zulks verkiesselijk acht, in dier voege kunnen ingerigt worden, dat men zich daarbij ten onderzoek voorstelt, de waarde van $V$ uit te drukken in eene functie van den vorm

$$h\{pB + qM + rG\}.$$

Alsdan kan de bepaling der onbekende coëfficiënten $p$, $q$, $r$ op de volgende wijze geschieden. In de eerste plaats is het klaar, dat $p$ en $r$ aan elkander gelijk zullen zijn, vermits het bij de inhoudsberekening onverschillig moet wezen, welk der beide grensvlakken tot grond- of bovenvlak aangenomen wordt. Hierdoor verandert $V$ in

$$h\{p(B + G) + qM\}.$$

Schrijvende nu voor $V$, $B$, $G$ en $M$ hunne reeds hiervoren opgegevene waarden in functie van $h$, dan komt men tot de identische vergelijking

$$p\{2A + Bh + Ch^2 + Dh^3\} + q\{A + \tfrac{1}{2}Bh + \tfrac{1}{4}Ch^2 + \tfrac{1}{8}Dh^3\}$$
$$= A + \tfrac{1}{2}Bh + \tfrac{1}{3}Ch^2 + \tfrac{1}{4}Dh^3,$$

welke de navolgende ter bepaling van $p$ en $q$ oplevert:

$$2p + q = 1,\ p + \tfrac{1}{2}q = \tfrac{1}{2},\ p + \tfrac{1}{4}q = \tfrac{1}{3},\ p + \tfrac{1}{8}q = \tfrac{1}{4}.$$

Deze vier vergelijkingen, die met elkander overeenstemmende zijn, geven $p = \tfrac{1}{6}$, $q = \tfrac{2}{3}$, en wijzen alzoo de mogelijkheid aan, om den inhoud $V$ in eene functie van den aangenomen vorm uit te drukken. Men heeft derhalve

$$V = \tfrac{1}{6}h\{B + 4M + G\}$$

of $$V = \tfrac{1}{6}h\{F(0) + 4F(\tfrac{1}{2}h) + F(h)\},$$

even als vroeger.

## § 35.

In plaats van deze laatste formule, vindt de Heer GRÜNERT,

zoo als reeds hiervoren opgemerkt is, eene andere uit *vier* termen bestaande, te weten:

$$V = \tfrac{1}{8}h\,\{F(0) + 3F(\tfrac{1}{3}h) + 3F(\tfrac{2}{3}h) + F(h)\}\ldots(e)$$

en zulks door eene vrij omslagtige analysis, welke inderdaad als niet zeer geschikt te achten is, om daarvan, bij eene elementaire behandeling der zaak, met vrucht gebruik te maken. Die formule, waarvan de toepassing steeds minder eenvoudig is dan de vorige, kan nogtans op eene even gemakkelijke wijze als deze laatste betoogd worden. Men stelle namelijk:

$$V = h\,\{pF(0) + qF(\tfrac{1}{3}h) + rF(\tfrac{2}{3}h) + sF(h)\},$$

dan is het wederom duidelijk, dat, aangezien elk der beide grensvlakken als oorsprong van telling kan aangenomen worden, de coëfficiënten der beide uiterste termen, even als die der beide middelste, gelijke waarden zullen hebben, en men alzoo stellen mag

$$V = h\,\{p\,(F(0) + F(h)) + q\,(F(\tfrac{1}{3}h) + F(\tfrac{2}{3}h))\}.$$

Schrijft men nu hierin voor $F(\tfrac{1}{3}h)$ en $F(\tfrac{2}{3}h)$ hare waarden, afgeleid uit die van

$$F(h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3,$$

dan komt men tot de identische vergelijking

$$p\{2A + Bh + Ch^2 + Dh^3\} + q\,\{2A + Bh + \tfrac{5}{9}Ch^2 + \tfrac{1}{3}Dh^3\}$$
$$= A + \tfrac{1}{2}Bh + \tfrac{1}{3}Ch^2 + \tfrac{1}{4}Dh^3,$$

welke ter bepaling van $p$ en $q$ geeft:

$$2p + 2q = 1,\ p + q = \tfrac{1}{2},\ p + \tfrac{5}{9}q = \tfrac{1}{3},\ p + \tfrac{1}{3}q = \tfrac{1}{4};$$

dus $p = \tfrac{1}{8}$ en $q = \tfrac{3}{8}$, waardoor de juistheid der formule (e) bewezen is.

Bij de toepassing dezer formule onderstelt men, dat de hoogte des ligchaams in drie gelijke deelen verdeeld is, en de inhouden der door de beide deelpunten loodregt genomen doorsneden bekend zijn.

## § 36.

De voorgaande beschouwing heeft ons thans tot het meer algemeene vraagstuk geleid, om, ingeval de inhoud $Y$ eener willekeurige doorsnede door eene rationale $n^{de}$ magts-functie van $x$ voorgesteld wordt, en men de hoogte $h$ in $n$ gelijke deelen

verdeelt, alsdan den inhoud $V$ des ligchaams uit te drukken door het product der hoogte met eene functie van de inhouden der beide grensvlakken en der evenwijdige doorsneden gaande door de $n-1$ deelpunten.

Het zal onzen lezers, naar wij vertrouwen, niet ongevallig zijn, indien wij hier nog eene algemeene leerwijze laten volgen, waardoor dat vraagstuk voor alle geheele waarden van $n$ kan opgelost worden (*).

Te dien einde onderscheiden wij twee gevallen ten aanzien van $n$. Dat getal kan namelijk *even* of *oneven* zijn.

### Ie Geval. $n = 2m$.

Het aantal doorsneden is alsdan *oneven*, en zoo men de beide grensvlakken mederekent, bestaan er, ter wederzijde der doorsnede gaande door het midden der hoogte, (welk punt wij hier tot oorsprong van telling aannemen) $m$ verschillende doorsneden. Laat

(*) Voor zoo veel de vlakke inhouden van kromme lijnen betreft, vindt men het vraagstuk reeds op eene algemeene wijze opgelost in onze ten jare 1837 door de 1e *klasse van het K. N. Instituut* uitgegevene verhandeling, getiteld: *Théorie des caractéristiques employées dans l'analyse mathématique*, *pag.* 25 *et seq.* Door in de aldaar verkregene uitkomsten, voor de lengten der ordinaten de inhouden der doorsneden te substitueren, worden die uitkomsten op de inhoudsberekening van ligchamen toepasselijk. De oplossing, welke wij thans mededeelen is echter van dien aard, dat zij geenszins de kennis onderstelt der bijzondere theorie, die het onderwerp van gemelde verhandeling uitmaakt, en alzoo meer algemeen zal kunnen begrepen worden. Wij hebben aldaar tevens opgemerkt, dat reeds Newton zich met deze beschouwing bezig gehouden heeft, dewijl zijne *Methodus differentialis* den juisten regel bevat, doch zonder bijvoeging van eenig betoog, om den inhoud eener kromme door middel van *vier* ordinaten te berekenen; terwijl na hem Cotes dat onderzoek voortgezet heeft tot op het geval van *elf* ordinaten; waarbij vervolgens door Stirling, voor het geval van een *oneven* aantal ordinaten, nog eene correctie tafel is gevoegd geworden, ten einde daarvan als benaderings hulpmiddel gebruik te maken. Geen dezer twee laatste wiskundigen schijnt intusschen het betoog zijner formules, waartoe nog al omslagtige berekeningen gevorderd werden, bekend gemaakt te hebben. Wij zien hieruit dat ons onderwerp verre af is van nieuw te zijn. Eene algemeene oplossing des vraagstuks is echter, voor zoo veel wij weten, nog door geen' wiskundige gegeven.

nu de rei dezer opvolgende doorsneden naar rangorde voorgesteld worden door

$$Y_{-m},\ Y_{-m+1},\ldots\ldots Y_{-1},\ Y_0,\ Y_1,\ldots\ldots Y_{m-1},\ Y_m,$$

en de algemeene waarde van $Y$, door

$$Y = F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2\ldots\ldots + a_nx^n.$$

De getallen-coëfficiënten, waarmede twee termen $Y_{-p}$, $Y_p$ in de te bepalen functie zullen aangedaan zijn, moeten nu wederom, om redenen reeds vroeger aangevoerd, gelijke waarden hebben, zoodat men voor de overeenkomstige coëfficiënten naar dezelfde rangorde, zal kunnen stellen

$$A_m,\ A_{m-1}\ldots\ldots A_1,\ A_0,\ A_1\ldots\ldots A_{m-1},\ A_m.$$

De oplossing van ons vraagstuk komt derhalve neder op het bepalen dezer coëfficiënten, in de algemeene vergelijking

$$h\{A_0Y_0+A_1(Y_{-1}+Y_1)+A_2(Y_{-2}+Y_2)\ldots+A_m(Y_{-m}+Y_m)\}$$
$$=\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Y\partial x.\ .\ .\ .\ .\ .\ (1).$$

Zij $\alpha = \frac{h}{n} = \frac{h}{2m}$ de afstand van twee opvolgende doorsneden, dan is vooreerst

$$V=\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Y\partial x = h\left\{a_0+\tfrac{1}{3}a_2m^2\alpha^2+\tfrac{1}{5}a_4m^4\alpha^4\ldots+\frac{1}{2m+1}a_{2m}m^{2m}\alpha^{2m}\right\}.$$

Wijders heeft men, omdat $Y_p = F(p\alpha)$ is, in het algemeen,

$$A_p\{Y_{-p}+Y_p\}=2A_p\{a_0+a_2p^2\alpha^2+a_4p^4\alpha^4\ldots+a_{2m}p^{2m}\alpha^{2m}\};$$

en hierin voor $p$ achtervolgens $1,2,3\ldots m$ schrijvende, en de uitkomsten substituerende in het eerste lid der vergelijking (1), bekomt men, na behoorlijke rangschikking, eene uitdrukking van den vorm

$$h\{B_0a_0 + B_1a_2\alpha^2 + B_2a_4\alpha^4\ldots + B_ma_{2m}\alpha^{2m}\},$$

welke, voor alle waarden van $a_0$, $a_2$, $a_4$, ... $a_{2m}$ identiek moetende zijn met de hiervoren opgegevene rei voor $V=\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Y\partial x$, tot de navolgende uitkomsten leidt:

$$B_0 = 1,\ B_1 = \tfrac{1}{3}m^2,\ B_2 = \tfrac{1}{5}m^4,\ldots B_m = \frac{1}{2m+1}m^{2m}.$$

De waarden van $B_0$, $B_1$, ... $B_m$ laten zich met weinig moeite uit de hiervoren vermelde substitutiën opmaken; en hierdoor zal men tot het navolgende stelsel van $m+1$ vergelijkingen geraken:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{2}A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \ldots + A_m = \frac{1}{2}, \\
A_1 + 2^2 A_2 + 3^2 A_3 \ldots + m^2 A_m = \frac{1}{2}.\frac{m^2}{3}, \\
A_1 + 2^4 A_2 + 3^4 A_3 \ldots + m^4 A_m = \frac{1}{2}.\frac{m^4}{5}, \\
A_1 + 2^6 A_2 + 3^6 A_3 \ldots + m^6 A_m = \frac{1}{2}.\frac{m^6}{7}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_1 + 2^{2m} A_2 + 3^{2m} A_3 \ldots + m^{2m} A_m = \frac{1}{2}.\frac{m^{2m}}{2m+1},
\end{array}\right\} \ldots (\alpha)$$

waaruit in elk bijzonder geval de getallen-waarden der $m+1$ coëfficiënten $A$ kunnen berekend worden.

## § 37.

Alvorens tot eene toepassing dezer vergelijkingen over te gaan, achten wij het niet onnuttig hier nog eene andere wijze van beschouwing mede te deelen, waardoor men het voorgaande stelsel $(\alpha)$ langs eenen meer eenvoudigen weg verkrijgen kan.

Daar namelijk de coëfficiënten $A$ onafhankelijk zijn van die, welke in de algemeene waarde van $Y = F(x)$ voorkomen, zoo moet de vergelijking (1) evenzeer gelden, voor het geval waarin elk der coëfficiënten $a_1$, $a_2 \ldots a_n$ gelijk nul, en dus $Y = a_0$ gesteld wordt; als wanneer ook $Y_{-p} = Y_p = a_0$, en verder

$$V = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Y \partial x = a_0 h \text{ wordt.}$$

Hierdoor nu gaat die vergelijking over in

$$h\left\{A_0 + 2A_1 + 2A_2 \ldots + 2A_m\right\} a_0 = a_0 h,$$

of $$\frac{1}{2}A_0 + A_1 + A_2 \ldots + A_m = \frac{1}{2},$$

welke dezelfde is als de eerste der vergelijkingen $(\alpha)$.

Voor $Y = a_2 x^2$, heeft men

$$V = \frac{1}{3} h a_2 m^2 \alpha^2,\ Y_0 = 0,\ Y_{-p} + Y_p = 2a_2 p^2 \alpha^2,$$

dus $$2h\left\{A_1 + 2^2 A_2 + 3^2 A_3 \ldots + m^2 A_m\right\} a_2 \alpha^2 = \frac{1}{3} h a_2 m^2 \alpha^2,$$

of $$A_1 + 2^2 A_2 + 3^2 A_3 \dots + m^2 A_m = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{3}.$$

Op gelijke wijze komt er, voor $Y = a_4 x^4$

$$V = \tfrac{1}{5} h a_4 m^4 \alpha^4,\ Y_0 = 0,\ Y_{-p} + Y_p = 2 a_4 p^4 \alpha^4,$$
$$2h\{A_1 + 2^4 A_2 + 3^4 A_3 \dots + m^4 A_m\} a_4 \alpha^4 = \tfrac{1}{5} h a_4 m^4 \alpha^4,$$

dus $$A_1 + 2^4 A_2 + 3^4 A_3 \dots + m^4 A_m = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{m^4}{5};$$

en zoo voortgaande tot aan $Y = a_{2m} x^{2m}$, zal men achtervolgens al de vergelijkingen van het stelsel ($\alpha$) bekomen.

## § 38.

Nemen wij thans tot voorbeeld het geval van $n = 4$ of $m = 2$, zoo heeft men, behalve de beide grensvlakken, $Y_{-2}$, $Y_2$, nog drie op gelijke afstanden van elkander verwijderde doorsneden of tusschenvlakken $Y_{-1}$, $Y_0$, $Y_1$. Ter bepaling der coëfficiënten $A$, hebben wij dan op te lossen de drie vergelijkingen

$$\tfrac{1}{2} A_0 + A_1 + A_2 = \tfrac{1}{2},\quad A_1 + 4 A_2 = \tfrac{2}{3},\quad A_1 + 16 A_2 = \tfrac{8}{5}.$$

Uit de beide laatsten volgt onmiddellijk

$$12 A_2 = \tfrac{14}{15},\ \text{dus}\ A_2 = \tfrac{7}{90},\ \text{en}\ A_1 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{14}{45} = \tfrac{16}{45},$$

en uit de eerste,

$$A_0 = 1 - 2\left(\tfrac{16}{45} + \tfrac{7}{90}\right) = \tfrac{2}{15}.$$

Derhalve komt er voor den inhoud

$$V = \frac{h}{90}\{12 Y_0 + 32(Y_{-1} + Y_1) + 7(Y_{-2} + Y_2)\}.$$

De zoo even gevondene formule kan onder anderen dienen ter berekening van den inhoud eens ligchaams, voortgebragt door de omwenteling eener parabolische kromme, tot vergelijking hebbende

$$y = a + bx + cx^2,$$

en zulks om de as der $x$ of om eene daaraan evenwijdige as.

Is die kromme tevens symetriek ten aanzien van de as der $y$, dan zal de formule kunnen herleid worden tot deze:

$$V = \frac{h}{45}\{6 Y_0 + 32 Y_1 + 7 Y_2\}.$$

Men neme bijv. het reeds in § 6 vermelde vat met parabolische duigenkromte, voor hetwelk aldaar gevonden is

$$y = a - \frac{x^2}{p},$$

dan heeft men, omdat $pv = \frac{1}{4}h^2$ is,

$$Y_0 = a^2\pi,$$

$$Y_1 = \left(a - \frac{1}{16}\cdot\frac{h^2}{p}\right)^2\pi = (a - \tfrac{1}{4}v)^2\pi,$$

$$Y_2 = \left(a - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{h^2}{p}\right)^2\pi = (a - v)^2\pi;$$

derhalve

$$V = \frac{h}{45}\left\{6a^2 + 32\,(a - \tfrac{1}{4}v)^2 + 7\,(a - v)^2\right\}\pi$$

of $$V = \frac{h}{45}\left\{45a^2 - 30av + 9v^2\right\}\pi$$

$$= h\left\{(a - \tfrac{1}{3}v)^2 + \tfrac{4}{45}v^2\right\}\pi;$$

hetgeen met de aldaar opgegevene waarde geheel overeenstemt.

### IIe Geval. $n = 2m + 1$.

### § 39.

Het aantal doorsneden nu *even* zijnde, zal men, het midden der hoogte wederom tot oorsprong van telling aannemende, de rij van de inhouden der doorsneden kunnen voorstellen door

$$Y_{-\frac{1}{2}n}\ldots\ldots Y_{-\frac{3}{2}},\ Y_{-\frac{1}{2}},\ Y_{\frac{1}{2}},\ Y_{\frac{3}{2}}\ldots\ldots Y_{\frac{1}{2}n},$$

waarin de beide uiterste termen de grensvlakken zijn. De coëfficiënten voor twee doorsneden op gelijken afstand dezer vlakken gelegen, wederom gelijke waarden hebbende, zal men thans moeten voldoen aan de vergelijking:

$$h\left\{A_0(Y_{-\frac{1}{2}} + Y_{\frac{1}{2}}) + A_1(Y_{-\frac{3}{2}} + Y_{\frac{3}{2}})\ldots + A_m\,(Y_{-\frac{1}{2}n} + Y_{\frac{1}{2}n})\right\}$$
$$= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Y\partial x\,.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

In de bepaling der coëfficiënten $A$ kunnen wij thans naar de laatste der hiervoren verklaarde handelwijzen te werk gaan.

Zij dan eerstelijk $Y = a_0$, dus $V = a_0 h$, dan verandert de vorige vergelijking in

$$2h\left\{A_0 + A_1 \ldots + A_m\right\} a_0 = a_0 h,$$

waaruit volgt $\quad A_0 + A_1 \ldots + A_m = \frac{1}{2}.$

Voor $Y = a_2 x^2$, wordt

$$V = \tfrac{2}{3} a_2 \left(\frac{n\alpha}{2}\right)^3 = \tfrac{1}{3} a_2 h.\left(\frac{n\alpha}{2}\right)^2,$$

$$Y_0 = 0, \quad Y_{-\frac{1}{2}p} + Y_{\frac{1}{2}p} = 2a_2\left(\frac{p\alpha}{2}\right)^2,$$

dus

$$2h\left\{\frac{1}{2^2}A_0 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 A_1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 A_2 \ldots + \left(\frac{1}{2}n\right)^2 A_m\right\} a_2 \alpha^2 = \tfrac{1}{3} h a_2 \left(\frac{n\alpha}{2}\right)^2$$

of, na herleiding

$$A_0 + 3^2 A_1 + 5^2 A_2 \ldots + n^2 A_m = \tfrac{1}{2}.\frac{n^2}{3}.$$

Op gelijke wijze voortgaande, zal men voor het geval van $n = 2m + 1$, het navolgende stelsel vergelijkingen, ter berekening van de coëfficiënten $A$, verkrijgen:

$$\left.\begin{array}{l}
A_0 + A_1 + A_2 \ldots + A_m = \tfrac{1}{2}, \\
A_0 + 3^2 A_1 + 5^2 A_2 \ldots + n^2 A_m = \tfrac{1}{2}.\dfrac{n^2}{3}, \\
A_0 + 3^4 A_1 + 5^4 A_2 \ldots + n^4 A_m = \tfrac{1}{2}.\dfrac{n^4}{5}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_0 + 3^{2m} A_1 + 5^{2m} A_2 \ldots + n^{2m} A_m = \tfrac{1}{2}.\dfrac{n^{2m}}{n}.
\end{array}\right\} \ldots (\beta)$$

Om ook van dit geval eene toepassing te maken, zoo stelle men $n = 5$ of $m = 2$, dan zijn de op te lossen vergelijkingen deze:

$$A_0 + A_1 + A_2 = \frac{1}{2}; \; A_0 + 9A_1 + 25A_2 = \frac{25}{6};$$

$$A_0 + 81A_1 + 625A_2 = \frac{125}{2};$$

waaruit op de gewone wijze gevonden wordt

$$A_0 = \frac{25}{144}, \; A_1 = \frac{25}{96}, \; A_2 = \frac{19}{288},$$

dus $V = \dfrac{h}{288}\left\{50(Y_{-\frac{1}{2}} + Y_{\frac{1}{2}}) + 75(Y_{-\frac{3}{2}} + Y_{\frac{3}{2}}) + 19(Y_{-\frac{5}{2}} + Y_{\frac{5}{2}})\right\}.$

## § 40.

Ten einde ons vraagstuk zoo algemeen mogelijk te behandelen, blijft ons nog overig de eindvergelijkingen ($\alpha$), ($\beta$) op eene algemeene wijze op te lossen, en alzoo de formules te doen kennen, waardoor elk der coëfficiënten $A$ regtstreeks in functie van $n$ of $m$ kan uitgedrukt worden.

Beginnen wij met het stelsel ($\alpha$). Het is klaar, dat de eerste dezer vergelijkingen slechts dient om de waarde van $A_0$ uit de vooraf gevondene van $A_1$, $A_2$... te berekenen, zoodat wij ons alleen hebben bezig te houden met de bepaling der $m$ grootheden $A_1$, $A_2$,... $A_m$, door middel der $m$ vergelijkingen:

$$A_1 + 2^2A_2 + 3^2A_3\ldots + m^2A_m = \tfrac{1}{2}.\frac{m^2}{3},$$

$$A_1 + 2^4A_2 + 3^4A_3\ldots + m^4A_m = \tfrac{1}{2}.\frac{m^4}{5},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_1 + 2^{2m}A_2 + 3^{2m}A_3\ldots + m^{2m}A_m = \tfrac{1}{2}.\frac{m^{2m}}{2m+1}.$$

Vermenigvuldigen wij de $m - 1$ eerste vergelijkingen, naar rangorde, met de onbepaalde coëfficiënten $P, Q, R,\ldots Z,$ en tellen wij de producten bij de laatste vergelijking op, dan zullen al de termen van het voorste lid dezer nieuwe vergelijking, met uitzondering van den eersten $(P + Q + R + \ldots Z + 1)\,A_1$, verdwijnen, indien men de aangenomene coëfficiënten in dier voege bepaalt, dat zij voldoen aan de $m - 1$ vergelijkingen:

$$P + 2^2Q + 2^4R\ldots + 2^{2(m-1)} = 0,$$

$$P + 3^2Q + 3^4R\ldots + 3^{2(m-1)} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P + m^2Q + m^4R\ldots + m^{2(m-1)} = 0.$$

Dit nu zal kunnen geschieden door de getallen $2^2, 3^2,\ldots m^2$, te beschouwen als de wortels der $(m - 1)^{de}$ magtsvergelijking

$$x^{m-1} + Zx^{m-2} + \ldots + Qx + P = 0,$$

waaruit, in overeenstemming met de leer der hoogeremagtsvergelijkingen terstond volgt, dat $\pm P$ gelijk aan het product der getallen $2^2, 3^2\ldots m^2$; $\mp Q$ gelijk aan de som hunner producten met weglating van een derzelven enz.; en $- Z$ gelijk aan de

som dezer getallen moet genomen worden; geldende hier het bovenste of onderste teeken naar dat $m$ oneven of even is.

Men heeft derhalve ter bepaling van den coëfficiënt $A_1$, de formule

$$A_1 = \tfrac{1}{2} m^2 \left\{ \frac{\tfrac{1}{3}P + \tfrac{1}{5}Qm^2 + \tfrac{1}{7}Rm^4 + \ldots + \frac{1}{2m+1}\, m^{2(m-1)}}{1 + P + Q + R \ldots + Z} \right\}.$$

Daar echter de noemer van dit gebroken de waarde voorstelt welke het product $(x - 2^2)(x - 3^2)\ldots(x - m^2)$ verkrijgt indien men $x = 1$ stelt, en dus vervangen kan worden door $\pm (4 - 1)(9 - 1)\ldots(m^2 - 1)$, naar dat $m$ oneven of even is, zoo kan men, eeniglijk op de getallen-waarden van $P, Q, R\ldots$ acht gevende, voor $A_1$ schrijven

$$A_1 = \tfrac{1}{2} m^2 \left\{ \frac{\tfrac{1}{3}P - \tfrac{1}{5}Qm^2 + \tfrac{1}{7}Rm^4 \ldots \pm \frac{1}{2m+1}\, m^{2(m-1)}}{(4 - 1)(9 - 1)\ldots(m^2 - 1)} \right\}.$$

Om $A_2$ op gelijke wijze te bepalen, heeft men in de voorgaande getallenrei $2^2, 3^2 \ldots m^2$, slechts $2^2$ door 1 te vervangen, en als dan aan $P, Q, R \ldots$ dezelfde beteekenis als hiervoren te geven. De coëfficiënt van $A_2$ verkrijgt alsdan bij de optelling der voormelde producten, tot waarde

$$2^2 \left\{P + Q.2^2 + R.2^4 \ldots + 2^{2(m-1)}\right\},$$

welke overeenkomt met die van het product

$$2^2 (x - 1)(x - 3^2)\ldots(x - m^2)$$

voor $x = 2^2$, namelijk $\pm 2^2 (1 - 4)(9 - 4)\ldots(m^2 - 4)$.

Noemende dan $P_1, Q_1, R_1 \ldots$, de waarden, welke $P, Q, R \ldots$ in dit geval bekomen, zoo vindt men

$$A_2 = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{m^2}{2^2} \left\{ \frac{\tfrac{1}{3}P_1 - \tfrac{1}{5}Q_1 m^2 + \tfrac{1}{7}R_1 m^4 \ldots \pm \frac{1}{2m+1} m^{(2m-1)}}{(1 - 4)(9 - 4)\ldots(m^2 - 4)} \right\}.$$

De overige coëfficiënten laten zich blijkbaar door soortgelijke formules uitdrukken.

Stellen wij, om die algemeene formules op een voorbeeld toe te passen, $n = 8$, of $m = 4$. De functie $Y$ is alsdan van den achtsten graad. Nu heeft men

$$P = 2^2 . 3^2 . 4^2 = 576,\ Q = 6^2 + 8^2 + 12^2 = 244,$$
$$R = 4 + 9 + 16 = 29,$$

$$A_1 = \tfrac{1}{2}m^2 \left\{ \frac{\frac{1}{3}P - \frac{1}{5}Qm^2 + \frac{1}{7}Rm^4 - \frac{1}{9}m^6}{(4-1)(9-1)(16-1)} \right\}$$

$$= 8 \left\{ \frac{192 - \frac{244}{5}.16 + \frac{29}{7}.16^2 - \frac{1}{9}.16^3}{3.8.15} \right\}$$

$$= \frac{16}{45} \left\{ \frac{12.315 - 244.63 + 29.16.45 - 35.16^2}{315} \right\},$$

waaruit men vindt $A_1 = \frac{5248}{14175}$;

$P_1 = 1.3^2.4^2 = 144, Q = 8^2 + 4^2 + 12^2 = 169, R_1 = 1 + 9 + 16 = 26,$

$$A_2 = \frac{16}{8} \left\{ \frac{48 - \frac{169}{5}.16 + \frac{26}{7}.16^2 - \frac{1}{9}.16^3}{-3.5.12} \right\}$$

$$= -\frac{8}{45} \left\{ \frac{3.315 - 169.63 + 26.16.45 - 35.256}{315} \right\},$$

of $A_2 = -\frac{464}{14175}$.

$P_2 = 1.2^2.4^2 = 64, Q_2 = 2^2 + 4^2 + 8^2 = 84, R_2 = 1 + 4 + 16 = 21,$

$$A_3 = \frac{16}{2.9} \left\{ \frac{\frac{64}{3} - \frac{84}{5}.16 + 3.16^2 - \frac{1}{9}.16^3}{5.7.8} \right\}$$

$$= \frac{16}{315} \left\{ \frac{4.15 - 84.9 + 48.5 - 5.256}{45} \right\} = \frac{2944}{14175};$$

$P_3 = 1.2^2.3^2 = 36, Q_3 = 2^2 + 3^2 + 6^2 = 49, R_3 = 1 + 4 + 9 = 14,$

$$A_4 = \frac{16}{2.4^2} \left\{ \frac{12 - \frac{49}{5}.16 + 2.16^2 - \frac{1}{9}.16^3}{-7.12.15} \right\}$$

$$= -\frac{131.45 - 49.36 + 1024.5}{2.3.7.15} = \frac{989}{28350}.$$

Hierbij komt nog

$$A_0 = 1 - 2(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = -\frac{454}{2835}.$$

Derhalve wordt de inhoud $V$ in het geval van $n = 8$, uitgedrukt door de formule

$$V = \frac{h}{28350}\{989(Y_{-4}+Y_4)+5888(Y_{-3}+Y_3)-928(Y_{-2}+Y_2)+10496(Y_{-1}+Y_1)-4540\,Y_0\}.$$

De vergelijkingen $\beta$ geldende voor het geval van $n$ *oneven*, zijn voor eene soortgelijke behandeling vatbaar. Noemende namelijk $P$ het product der $m$ getallen $3^2$, $5^2$, $7^2 \ldots n^2$; $Q$ de som van derzelver producten met weglating van een hunner, enz., dan is het gemakkelijk in te zien, dat de coëfficiënt $A_0$ tot waarde heeft

$$A_0 = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{P - \frac{1}{3}Qn^2 + \frac{1}{5}Rn^4 \ldots \pm \frac{1}{n}n^{2m}}{(3^2-1)(5^2-1)\ldots(n^2-1)}\right\},$$

en dat de overige $m - 1$ coëfficiënten door gelijksoortige formules uit te drukken zijn; waaromtrent het, na het voorafgaande, overbodig zoude zijn hier eenige verdere aanwijzing te geven.

## § 41.

Eindelijk, en hiermede besluiten wij onzen arbeid over dit belangrijke onderwerp, zij nog opgemerkt dat men, insgelijks voor het algemeene geval, eene formule kan vinden ter bepaling van den afstand van het zwaartepunt des ligchaams tot een der grensvlakken.

Zij namelijk $n$ de graad der functie $Y$, dan is $xY$ eene functie van den $(n+1)^{en}$ graad. Onderstellen wij $n$ oneven en $n + 1 = 2m$, $\alpha = \frac{h}{2m}$, dan zal men, volgens het hiervoren gevondene, mogen schrijven

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Yx\partial x = h\{A_1\alpha(Y_{-1}+Y_1)+2A_2\alpha(Y_{-2}+Y_2)\ldots+(m-1)A_{m-1}\alpha(Y_{-m+1}+Y_{m-1})+mA_m\alpha(Y_{-m}+Y_m)\}.$$

Voor $\int Y\partial x$ zal men, ofschoon $Y$ eene functie is van een lageren graad dan $Yx$, evenwel de algemeene waarde van $V$ kunnen schrijven. Stellende nu $X_0$ voor den afstand van het zwaartepunt, gerekend van het middenvlak, dan vindt men in de positieve rigting der $x$

$$X_0 = \frac{\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Yx\partial x}{\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} Y\partial x} = \alpha\left\{\frac{A_1(Y_{-1}+Y_1)+2A_2(Y_{-2}+Y_2)\ldots+mA_m(Y_{-m}+Y_m)}{A_0Y_0+A_1(Y_{-1}+Y_1)+A_2(Y_{-2}+Y_2)\ldots+A_m(Y_{-m}+Y_m)}\right\}.$$

Wil men den afstand van het zwaartepunt tellen van het aan de negatieve zijde gelegen grensvlak, dan heeft men, dezen afstand $X$ noemende,

$$X = X_0 + \frac{h}{2} = X_0 + m\alpha.$$

Na verschikking der termen volgens rangorde, zal men uit de vorige waarde van $X_0$; zeer gemakkelijk de navolgende formule vinden

$$X = \frac{\alpha\{A_{m-1}Y_{-(m-1)}+2A_{m-2}Y_{-(m-2)}\ldots+mA_0Y_0+(m+1)A_1Y_1\ldots+2mA_mY_m\}}{A_mY_{-m}+A_{m-1}Y_{-(m-1)}+A_{m-2}Y_{-(m-2)}\ldots+A_0Y_0+A_1Y_1\ldots\ldots+A_mY_m} \quad \ldots (3)$$

Men ziet dat de termen van den teller dezer breuk uit die des noemers afgeleid worden, door deze naar

rangorde te vermenigvuldigen met de afstanden der achtervolgende doorsneden tot het vlak van hetwelk de afstand $X$ geteld wordt; hetgeen eveneens in het bijzondere geval van § 26 gevonden is. Als benaderingsformule beschouwd, zal echter de zoo even gevondene voor dezelfde waarden van $\alpha$ naauwkeurigere uitkomsten dan de laatstgenoemde opleveren. Blijkbaar zal de formule (3) ook op een even aantal doorsneden toepasselijk te maken zijn, door slechts in den noemer den term $A_0 Y_0$ te doen vervallen, en wijders voor elken term $A_p Y_p$ te schrijven $A_{p-\frac{1}{2}} Y_{p-\frac{1}{2}}$, overeenkomstig de in § 36 aangenomene notatie.

# VERHANDELING,

OVER EENE

# MERKWAARDIGE DYNAMISCHE EIGENSCHAP

VAN EENE BIJZONDERE SOORT VAN

# DRIEHOEKIGE PIRAMIDEN.

DOOR

**G. F. W. BAEHR,**

MATH. ET PHIL. NAT. CAND.,

*Lector in de Wiskunde bij het Gymnasium*

TE

MIDDELBURG.

# VERHANDELING,

## OVER EENE MERKWAARDIGE DYNAMISCHE EIGENSCHAP VAN EENE BIJZONDERE SOORT VAN DRIEHOEKIGE PIRAMIDEN.

Wanneer een ligchaam zich geheel vrij, of om eene vaste as, beweegt, zal niet alleen de meerdere of mindere massa van dit ligchaam, maar ook zijne gedaante, en de wijze waarop de massa in het ligchaam verdeeld is, van invloed zijn op de verschijnselen die zich bij de beweging voordoen. Wordt bij voorbeeld aan eenen homogenen bol, door eenen schok, waarvan de rigting niet door zijn middelpunt gaat, eene snelheid medegedeeld, dan zal zich bij de voortgaande beweging eene ronddraaijende voegen, om eene as, loodregt op het vlak, dat het middelpunt en de rigting van den schok bevat; en deze ronddraaijende beweging zal standvastig om dezelfde as blijven voortduren, indien zij door geene van buiten aangebragte omstandigheden gewijzigd wordt. Is echter de bol niet homogeen, zoodat het middelpunt niet meer met het zwaartepunt te zamen valt, of wijkt de vorm van het ligchaam eenigzins van den zuiver bolvormigen af, dan zal met elk oogenblik de as, waarom de draaijende beweging plaats heeft, in het ligchaam van stelling veranderen, en een oppervlak beschrijven, dat vooraf door de analyse kan aangewezen worden, indien men al de omstandigheden kent, die de zamenstelling van het ligchaam, en den schok dien het ondervonden heeft, bepalen.

De nasporing van deze en van andere tot hetzelfde onderwerp behoorende verschijnselen, die van zooveel belang zijn voor de juiste kennis van de inrigting van ons zonnestelsel, heeft gedurende eene reeks van jaren, na het ontstaan der hoogere analysis, den ijver der grootste wiskunstenaars gaande gehouden; en hunne ontdekkingen hebben voorzeker niet weinig bijgedragen, om aan de sterrekunde dien luister te geven, waarop zij zich thans met regt beroemen kan. Echter zijn de wetten, die de verschijnselen der hemelligchamen regelen, volmaakt dezelfde als die, volgens welke onze werktuigen op aarde zich bewegen; en is de

werktuigkunde der hemelligchamen een onderwerp, dat ons door zijne verhevenheid bij voorkeur aanlokt, niet minder beloonend is de nasporing derzelfde wetten, bij inrigtingen, die van zooveel invloed zijn op onzen maatschappelijken toestand. Elke bijzonderheid, hoe gering ook, hierbij ontdekt, kan tot meer gewigtige bijzonderheden leiden, of, door anderen nader onderzocht en uitgebreid, in gewigt stijgen. Valt de toepassing eener ontdekte waarheid niet onmiddellijk in het oog, als waarheid heeft zij eene plaats in den keten der menschelijke kennis, en kan dus hare bekendmaking nuttig zijn.

Het is voornamelijk deze gedachte, die mij aanspoorde tot de mededeeling van de volgende beschouwingen over een onderwerp, waarop mijne aandacht zich het eerst vestigde, ten gevolge van eene vraag, door ons Wiskundig Genootschap voorgesteld, te weten: *Is het mogelijk eene driehoekige piramide, om eene van hare ribben draaijende, tegen een vast punt te doen botsen, zonder dat die ribbe eenige uitwerking van den schok ondervindt?* Zoo als men uit het volgende zien zal, vind ik wel de mogelijkheid, om aan eene in rust zijnde piramide, wier zamenstelling aan zekere voorwaarde voldoet, door eene kracht, eene ronddraaijende beweging om een harer ribben mede te deelen, zonder dat die ribbe eenige uitwerking van deze kracht ondervindt; maar moet, volgens mijne meening, de vraag zelve ontkennend beantwoord worden, omdat, bij het botsen eener draaijende piramide tegen een vast beletsel, de rigting van den schok loodregt is op het gebotst wordende zijvlak, terwijl die rigting, zal de draaijingsas geene uitwerking ondergaan, loodregt moet zijn op een vlak dat door die as gaat en binnen de massa van het draaijende ligchaam valt. Men zoude echter, door het maken eener inbooring of inkeeping, gepaard met eene andere geschikte verdeeling der alzoo weggenomene massa, de rigting der botsing loodregt op het zoo even genoemde vlak kunnen brengen, en zoodoende den schok werkelijk, zonder dat de as gedrukt werd, kunnen doen plaats hebben. Maar met deze wijziging in het zamenstel der piramide, kan de vraag dan nog slechts voor eene bijzondere soort van piramiden bevestigend beantwoord worden, namelijk voor dezulke, waarin twee ribben gevonden worden, die elkander regthoekig kruissen, en dan indien zij om een dezer ribben draaijen.

Eene omstandigheid, die men onmogelijk vooraf kon vermoeden, en wier mededeeling daarom belangrijk kan zijn voor hen, die zich ook met het praktische der werktuigen bezig houden. Immers konden bij eenig werktuig botsingen voorkomen van ligchamen, die den piramidalen vorm nabijkwamen, en waaraan men dan ook bij voorkeur de bovengezegde gedaante zou geven, met in acht neming der overige aangewezene omstandigheden, die dienen kunnen om de drukking op de as zoo gering mogelijk te maken; maar voornamelijk, indien de botsende ligchamen al eene andere gedaante mogten hebben, kan het hier behandelde voorbeeld leeren, van hoeveel invloed eene wijziging in die gedaante kan wezen, en nadere onderzoekingen daaromtrent uitlokken.

Ter zake, hebben wij dan: 1° uit de theorie door den Heer J. P. Delprat in zijne *Dynamica* voorgedragen, de omstandigheden gezocht, waaronder een ligchaam, door eene kracht, om eene vaste as in beweging kan worden gebragt, zonder dat die as eenige uitwerking ondervindt; 2° gezocht onder welke voorwaarde eenig ligchaam, indien de draaijings-as aangewezen is, in die omstandigheden kan verkeeren; en 3° daarvan eene toepassing gemaakt op de driehoekige piramide, die om een van hare ribben moet draaijen.

---

## 1.

Volgens de theorie door den Heer J. P. Delprat, in zijne *Dynamica* (§ 105 en volgende), *Over de beweging van een ligchaam om eene vaste as*, voorgedragen, zal, wanneer die as de as der $z$ van een regthoekig coördinaten-stelsel is, eene kracht $Q$, wier rigting hoeken $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$ met de coördinaten-assen maakt, en wier aangrijpingspunt $h$, $i$ en $k$ tot coördinaten heeft, aan zulk een ligchaam, welks massa $P$ is, eene hoekversnelling $G$ mededeelen, bepaald door de formule (zie § 108)

$$Q(h\ Cos.\beta - i\ Cos.\alpha) = \frac{G}{g}\, n^2 P, \quad \ldots \quad (\alpha)$$

waarin $n^2P$ het moment van traagheid der massa $P$, ten opzigte van de draaijings-as voorstelt.

De drukkingen, welke hierbij die as ondergaat, zijn dan, zoo $a$ en $b$ de met de assen der $x$ en der $y$ evenwijdige coördinaten van het zwaartepunt der massa $P$ voorstellen, (zie § 109):

1°. Eene kracht $X' - X$ langs de as der $x$, aangewezen

door de formule

$$X' - X = Q\ Cos.\alpha + \frac{G}{g}\ bP.$$

2°. Eene kracht $Y' - Y$ langs de as der $y$, aangewezen door

$$Y' - Y = Q\ Cos.\beta - \frac{G}{g}\ aP.$$

3°. Eene kracht $Z' - Z$ langs de as der $z$,

$$Z' - Z = Q\ Cos.\gamma.$$

4°. Een koppel $L' - L$ loodregt op de as der $x$,

$$L' - L = Q(i\ Cos.\gamma - k\ Cos.\beta) + \frac{G}{g}\ \int xz\delta m.$$

5°. Een koppel $M' - M$ loodregt op de as der $y$,

$$M' - M = Q(k\ Cos.\alpha - h\ Cos.\gamma) + \frac{G}{g}\ \int yz\delta m.$$

Zal nu de draaijings-as geene drukkingen ondergaan, zoo moeten deze krachten en koppels ieder in het bijzonder gelijk nul zijn.

Omdat men het vlak der $xz$ door het zwaartepunt der massa $P$, en het vlak der $xy$ door het aangrijpingspunt der kracht $Q$ kan laten gaan, zal men nog $b = 0$ en $k = 0$ kunnen stellen; en hierdoor verkrijgt men dan, voor de voorwaarden dat de as geene drukkingen ondergaat:

$$Q\ Cos.\alpha = 0,$$

$$Q\ Cos.\beta - \frac{G}{g}\ aP = 0,$$

$$Q\ Cos.\gamma = 0,$$

$$Qi\ Cos.\gamma + \frac{G}{g}\ \int xz\delta m = 0,$$

$$-\ Qh\ Cos.\gamma + \frac{G}{g}\ \int yz\delta m = 0;$$

uit de eerste en derde van deze voorwaarden volgt dadelijk $\alpha = 90°$ en $\gamma = 90°$; dus $\beta = 0$, hetwelk reeds aantoont, dat de rigting van $Q$ loodregt moet zijn op het vlak der $xz$, dat is loodregt op het vlak door de draaijings-as en het zwaartepunt der massa $P$ gaande. De drie overige voorwaarden worden nu

$$Q - \frac{G}{g}\ aP = 0, \quad \frac{G}{g}\ \int xz\delta m = 0 \quad \text{en} \quad \frac{G}{g}\ \int yz\delta m = 0,$$

terwijl ($\alpha$) geeft $\dfrac{G}{g} = \dfrac{Qh}{n^2 P}$,

zoodat de drie laatste voorwaarden overgaan in

$Q\left\{1-\frac{ahP}{n^2P}\right\}=0,\quad \frac{Qh}{n^2P}\int xz\delta m=0$ en $\frac{Qh}{n^2P}\int yz\delta m=0.$

Om aan deze voorwaarden te voldoen, zal men, daar $Q$ niet gelijk nul kan zijn, vooreerst moeten hebben $1-\frac{ahP}{n^2P}=0$, waaruit volgt

$$h=\frac{n^2P}{aP}; \qquad (\beta)$$

terwijl dan verder, omdat blijkens deze formule ook $h$ niet gelijk nul kan zijn, nog

$$\int xz\delta m=0 \text{ en } \int yz\delta m=0 \qquad (\gamma)$$

zal moeten wezen.

Hierbij merken wij op, dat, door de assen der $x$ en der $y$ in haar vlak om te draaijen, een nieuw coördinaten-stelsel kan verkregen worden, voor hetwelk ook de derde integraal $\int xy\delta m$ gelijk nul is, terwijl de twee eersten nul blijven. Uit de gevondene formulen volgt dus, dat aan eene massa eene hoekversnelling om eene vaste as kan medegedeeld worden, zonder dat de as eenige drukking ondervindt, door eene kracht wier rigting gelegen is in het vlak van twee lijnen, die met de draaijings-as een stelsel van hoofdassen uitmaken; daartoe moet dan de rigting dier kracht loodregt zijn op het vlak, dat door de draaijings-as en het zwaartepunt der massa gaat, en bovendien van de draaijings-as verwijderd zijn op eenen afstand, die gelijk is aan het moment van traagheid der massa gedeeld door haar statisch moment, ten opzigte van die as. Het aangrijpingspunt der kracht kan daarbij in een willekeurig punt van hare rigting gesteld worden, dewijl in de voorgaande formulen, de ordinaat $z$ van dat punt verdwenen is.

Deze besluiten zijn geheel onafhankelijk van de grootte der kracht $Q$, die uit de formulen almede verdwenen is; zij blijven dus gelden wanneer $Q$ eene zeer groote kracht is, die gedurende een zeer klein tijddeeltje gewerkt heeft, zoodat de medegedeelde hoekversnelling $G$ overgaat in de, bij het einde van dat tijddeeltje, aan de massa medegedeelde hoeksnelheid. Daar nu het uitwerksel van elken schok kan beschouwd worden als dat van eene zeer groote kracht gedurende een zeer klein tijddeeltje, zal men ook aan de massa $P$ door eenen schok eene hoeksnelheid kunnen mededeelen, zonder dat de as eenige uitwerking van dien schok ondervindt, indien men slechts die schok zoodanig kan aanbrengen,

dat zijne rigting in dezelfde omstandigheden verkeert als die, welke wij boven voor de kracht $Q$ vonden. Desgelijks zal men eene reeds draaijende massa, zonder dat de as eenige uitwerking ondervindt, tegen een vast punt kunnen doen botsen, indien slechts de rigting van dien schok, in tegengestelden zin, juist kan overeenkomen met de meergenoemde rigting. Maar daar bij de botsing van twee ligchamen tegen elkander, de krachten bij den stoot ontwikkeld altijd normaal op het gemeenschappelijk vlak van aanraking zijn (immers zoo men gelijk hier ondersteld wordt geene wrijving in aanmerking neemt) zoo zal de schok de rigting, die wij voor de kracht $Q$ vonden, niet kunnen hebben, tenzij daar ter plaatse, waar die rigting het oppervlak der massa snijdt, dat oppervlak ten minste voor een klein gedeelte evenwijdig zij met het vlak, door de draaijings-as en het zwaartepunt der massa gebragt.

Wanneer eene driehoekige piramide om een van hare ribben wentelt, kan geen van hare zijvlakken evenwijdig zijn met het vlak, door de draaijings-as en het zwaartepunt der piramide gebragt; indien het derhalve al mogelijk is, eene kracht $Q$ te vinden, wier rigting bij dit ligchaam in de aangewezene omstandigheden verkeert, zal wel zulk eene kracht, zonder de as te drukken, aan die piramide eene hoeksnelheid kunnen mededeelen of ontnemen; maar geen schok zal ditzelfde gevolg kunnen hebben, en dus zal men de piramide ook niet met eenig punt van haar oppervlak tegen een vast punt kunnen laten botsen, zonder dat de as eenige uitwerking ondervindt, tenzij men ter behoorlijker plaatse, door eene kleine inkeeping, gering genoeg om overigens buiten rekening te mogen blijven, een zeer klein gedeelte van haar oppervlak evenwijdig met het genoemde vlak gemaakt hebbe.

Het zal niet onbelangrijk zijn, nog nader te onderzoeken, onder welke voorwaarden dit overigens mogelijk is.

---

## 2.

Om te onderzoeken of men door eene kracht (en dus ook, onder de zoo even gemaakte bedingen, door eenen schok) aan eene massa eene hoeksnelheid om eene bepaalde as kan mededeelen of ontnemen, zonder dat die as daarvan eenige uitwerking ondervindt, zal men moeten nagaan of die as, voor eenig als oorsprong te nemen punt van hare rigting, een der drie hoofdassen

kan worden, welke door dit punt kunnen worden getrokken.

Nemen wij hiertoe die as zelve als as der $z$ van een regthoekig coördinaten-stelsel aan, waarvan overigens de assen der $x$ en der $y$, gelijk mede de oorsprong, willekeurig gekozen zijn, en stellen wij, dat men voor dit coördinaten-stelsel berekend heeft de integralen

$$\int xz\delta m = A \quad \text{en} \quad \int yz\delta m = B,$$

zoo is de vraag, of men door den oorsprong over de as der $z$ te verplaatsen, terwijl de assen der $x$ en der $y$ evenwijdig met haren eersten stand blijven, een ander coördinaten-stelsel kan verkrijgen, waarvoor men hebben zal

$$\int xz'\delta m = 0 \quad \text{en} \quad \int yz'\delta m = 0.$$

Het is onnoodig hierbij de assen der $x$ en der $y$ ook nog van rigting te veranderen, omdat gelijk wij reeds opmerkten, de integralen $\int xz'\delta m$ en $\int yz'\delta m$, wanneer die eenmaal nul zijn, nul zullen blijven, wanneer men de assen der $x$ en der $y$, om den oorsprong, in haar vlak draait.

Laat de oorsprong op den afstand $n$ langs de positieve as der $z$ verplaatst worden, zoodat $z' = z - n$ is, dan zal men hebben:

$$\int xz'\delta m = \int x(z-n)\delta m = A - n\int x\delta m,$$
$$\int yz'\delta m = \int y(z-n)\delta m = B - n\int y\delta m,$$

of de geheele massa door $M$, en de coördinaten van haar zwaartepunt, evenwijdig met de assen der $x$ en der $y$, door $x_1$ en $y_1$ voorstellende, waardoor $\int x\delta m = x_1 M$ en $\int y\delta m = y_1 M$ wordt,

$$\int xz'\delta m = A - nx_1 M$$

en

$$\int yz'\delta m = B - ny_1 M.$$

Zullen nu deze integralen nul zijn, dan moet men hebben

$$A = nx_1 M \quad \text{en} \quad B = ny_1 M,$$

zoodat men ter bepaling van $n$ heeft de beide formulen

$$n = \frac{A}{x_1 M} \quad \text{en} \quad n = \frac{B}{y_1 M},$$

die met elkander in strijd zullen zijn, tenzij men hebbe $y_1 A = x_1 B$, dat is

$$y_1 \int xz\delta m = x_1 \int yz\delta m. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\delta)$$

Deze vergelijking ($\delta$) bevat dus de voorwaarde die vervuld moet wezen, opdat het mogelijk zij in de as der $z$ een nieuw punt als oorsprong te nemen, zoodanig dat voor dien nieuwen oorsprong gelijktijdig de integralen $\int xz'\delta m$ en $\int yz'\delta m$ nul worden; terwijl dan de plaats van dien nieuwen oorsprong, met betrekking

tot den eersten, die geheel willekeurig aangenomen was, bepaald wordt door de formule

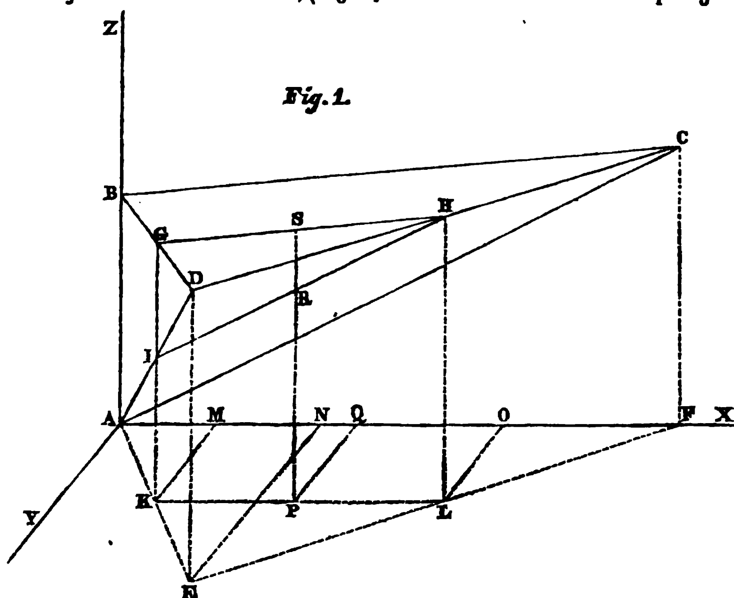
$$n = \frac{\int xz\partial m}{x_1 M} = \frac{\int yz\partial m}{y_1 M} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\varepsilon)$$

Wanneer de as der $z$ door het zwaartepunt der massa ging, zoodat $x_1 = 0$ en $y_1 = 0$ was, zou wel aan de vergelijking ($\delta$) voldaan zijn; maar volgens ($\varepsilon$) zou men dan hebben $n = \infty$ of $n = \frac{0}{0}$, naargelang de integralen $\int xz\partial m$ en $\int yz\partial m$ niet of al nul waren. In het eene geval kan op de as der $z$ geen punt aangewezen worden, in het andere geval zal elk willekeurig punt van de as der $z$ genomen kunnen worden, om te maken dat voor zulk een punt als oorsprong, de as der $z$ eene hoofd-as zij.

---

3.

Gaan wij nu, het voorgaande toepassende, onderzoeken of de ribbe eener driehoekige piramide, voor eenig punt van die ribbe als oorsprong, eene hoofd-as kan zijn. Nemen wij daartoe aanvankelijk het eene uiteinde A, (Fig. 1) der bedoelde ribbe als oorsprong



der onderling regthoekige coördinaten, die ribbe AB zelve als as der $z$, en het zijvlak ABC der piramide ABCD als vlak der $xz$ aan, dan zijn de assen der $x$ en der $y$ hierdoor van zelve bepaald, terwijl de geheele piramide bepaald zal zijn, door de coördinaten van hare hoekpunten als bekenden aan te nemen; stellen wij alzoo te zijn: de coördinaten van het hoekpunt D, AN $= a$, EN $= b$ en ED $= c$; die van het hoekpunt C, AF $= a'$ en FC $= c'$; en de ordinaat van het punt B, AB $= c''$.

Om nu in te zien, hoe men de integralen $\int xz\partial m$ en $\int yz\partial m$ over de geheele piramide zal kunnen uitbreiden, snijden wij haar door een vlak, evenwijdig met het $xz$-vlak, en daarvan op den afstand KM verwijderd; dit geeft de driehoekige doorsnede IGH, waarin wij evenwijdig met de as der $z$ eene ordinaat PS trekken, die de zijden van den driehoek IGH in R en S ontmoet; alsnu ziet men ligtelijk in, dat de gezegde integralen bepaald kunnen worden, door eerst te integreren ten opzigte van $z$, tusschen de grenzen $z_1 =$ PR en $z_2 =$ PS; daarna ten opzigte van $x$, tusschen de grenzen $x_1 =$ AM en $x_2 =$ AO, en eindelijk ten opzigte van $y$ tusschen grenzen $y_1 = 0$ en $y_2 =$ NE $= b$.

De nadere bepaling dezer grenzen kan als volgt analytisch geschieden. Men herinnere zich dat de Cosinussen der hoeken, die eene lijn met de drie assen maakt, evenredig zijn met de projectiën van een stuk dezer lijn op die assen, en dat zij positief of negatief genomen moeten worden, naarmate die projectiën, van de projectiën van een zelfde punt afrekenende, in de rigting der positieve of negatieve assen vallen; dan zal men uit de figuur gemakkelijk kunnen opmaken, dat de vergelijkingen der lijnen AD, BD en DC zijn:

$$\text{van AD,}\quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

$$\text{van BD,}\quad \frac{x-a}{a} = \frac{y-b}{b} = \frac{z-c}{c-c''},$$

$$\text{van CD,}\quad \frac{x-a}{a-a'} = \frac{y-b}{b} = \frac{z-c}{c-c'};$$

hieruit vindt men, voor de coördinaten van de hoekpunten der driehoekige doorsnede IGH, en voor de integratie-grenzen van $z$, in funtie van $y =$ KM,

$$x_1 = AM = \frac{a}{b}y, \quad KM = y, \quad KI = \frac{c}{b}y, \quad KG = \frac{y(c-c'') + bc''}{b},$$

$$x_2 = AO = \frac{y(a-a') + a'b}{b}, \quad LH = \frac{y(c-c') + bc'}{b}.$$

Neemt men voorts, als hulpmiddel, voor een oogenblik KL als eene as der $x'$ en KG als eene as der $y'$ aan, zoo zijn de vergelijkingen der lijnen IH en GH, in het vlak GKL, omdat zij door het punt H gaan, welks coördinaten zijn $KL = AO - AM = \frac{a'(b-y)}{b}$ en $LH = \frac{y(c-c') + bc'}{b}$, en omdat zij met de as der $x'$ hoeken maken, wier tangenten zijn $\frac{c'}{a'}$ en $\frac{c'-c''}{a'}$:

van IH, $z' - \frac{y(c-c') + bc'}{b} = \frac{c'}{a'}\left\{x' - \frac{a'(b-y)}{b}\right\}$

van GH, $z' - \frac{y(c-c') + bc'}{b} = \frac{c'-c''}{a'}\left\{x' - \frac{a'(b-y)}{b}\right\}$;

stelt men dan hierin $x' = KP = AQ - AM = x - \frac{a}{b}y$, zoo vindt men na eenige herleiding, voor de integratie-grenzen van $z$, in functie van $x = AQ$ en $y = PQ$,

$$z_1 = PR = \frac{(a'c - ac')y + bc'x}{a'b},$$

en $$z_2 = PS = z_1 + \frac{c''}{a'b}\left\{(a-a')y - bx + a'b\right\}$$

$$= \frac{(a'c - ac' + ac'' - a'c'')y + b(c' - c'')x + a'bc''}{a'b}.$$

Verder heeft men, de massa der cubieke eenheid kortheidshalve door 1 voorstellende, $\partial m = \partial x \partial y \partial z$; en dus, veronderstellende dat de integralen tusschen de aangewezene grenzen genomen worden,

$$\left.\begin{aligned} \int xz\partial m &= \int\int\int xz\partial x\partial y\partial z = \tfrac{1}{2}\int\int x(z_2^2 - z_1^2)\partial y\partial x \\ \text{en} \quad \int yz\partial m &= \int\int\int yz\partial x\partial y\partial z = \tfrac{1}{2}\int\int y(z_2^2 - z_1^2)\partial y\partial x; \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

maar nu is

$$z_2 + z_1 = \frac{(2a'c - 2ac' + ac'' - a'c'')y + b(2c' - c'')x + a'bc''}{a'b}$$

en $z_2 - z_1 = \frac{c''}{a'b}\left\{(a-a')y - bx + a'b\right\}$,

dus door vermenigvuldiging, en nà herleiding van het product,

$$x_2{}^2 - x_1{}^2 = \frac{c''}{a'^2 b^2} \times \left\{ \begin{array}{l} (a-a')(2a'c - 2ac' + ac'' - a'c'')y^2 \\ + 2b(2ac' - a'c' - a'c - ac'' + a'c'')xy \\ + 2a'b(a'c - ac' + ac'' - a'c'')y \\ + b^2(c'' - 2c')x^2 \\ + 2a'b^2(c' - c'')x \\ + a'^2 b^2 c'' \end{array} \right\}; \ldots (b)$$

de bovenstaande integralen zijn dus afhankelijk van de volgende, die allen tusschen dezelfde aangewezene grenzen moeten genomen worden, namelijk:

$$\int\int y^2 x\,\partial x\,\partial y, \quad \int\int x^2 y\,\partial x\,\partial y, \quad \int\int xy\,\partial x\,\partial y,$$
$$\int\int x^3\,\partial x\,\partial y, \quad \int\int x^2\,\partial x\,\partial y, \quad \int\int x\,\partial x\,\partial y,$$
$$\int\int y^3\,\partial x\,\partial y, \quad \int\int y^2\,\partial x\,\partial y, \quad \int\int y\,\partial x\,\partial y.$$

Hiertoe heeft men, in aanmerking nemende dat de grenzen zijn:

voor $x$, $x_1 = \frac{ay}{b}$ en $x_2 = \frac{(a-a')y + a'b}{b} = x_1 + \frac{a'(b-y)}{b}$;

en voor $y$, $y_1 = 0$ en $y_2 = b$: .

$$\int\int y^2 x\,\partial x\,\partial y =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int y^2 (x_2{}^2 - x_1{}^2)\,\partial y$$
$$= \tfrac{1}{2}\int y^2\,\partial y\,\frac{2aa'y(b-y) + a'^2(b-y)^2}{b^2}$$
$$= \frac{1}{2b^2}\int\left\{2aa'(by^3 - y^4) + a'^2(b^2y^2 - 2by^3 + y^4)\right\}\partial y$$
$$= \frac{1}{2b^2}\left\{2aa'(\tfrac{1}{4}b^5 - \tfrac{1}{5}b^5) + a'^2(\tfrac{1}{3}b^5 - \tfrac{1}{2}b^5 + \tfrac{1}{5}b^5)\right\}$$
$$= \tfrac{1}{60}a'b^3(3a + a');$$

$$\int\int x^2 y\,\partial x\,\partial y =$$
$$= \tfrac{1}{3}\int y(x_2{}^3 - x_1{}^3)\,\partial y$$
$$= \tfrac{1}{3}\int y\,\partial y\,\frac{3a^2a'y^2(b-y) + 3aa'^2(b-y)^2 + a'^3(b-y)^3}{b^3}$$
$$= \frac{1}{3b^3}\int\left\{\begin{array}{l}3a^2a'(by^3 - y^4) + 3aa'^2(b^2y^2 - 2by^3 + y^4) \\ + a'^3(b^3y - 3b^2y^2 + 3by^3 - y^4)\end{array}\right\}\partial y$$
$$= \frac{1}{3b^3}\left\{\begin{array}{l}3a^2a'(\tfrac{1}{4}b^5 - \tfrac{1}{5}b^5) + 3aa'^2(\tfrac{1}{3}b^5 - \tfrac{1}{2}b^5 + \tfrac{1}{5}b^5) \\ + a'^3(\tfrac{1}{2}b^5 - b^5 + \tfrac{3}{4}b^5 - \tfrac{1}{5}b^5)\end{array}\right\}$$
$$= \tfrac{1}{60}a'b^2(3a^2 + 2aa' + a'^2);$$

$$\int\int xy\delta x\delta y =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int y({x_2}^2 - {x_1}^2)\,\delta y$$

$$= \tfrac{1}{2}\int y\delta y\,\frac{2aa'y\,(b-y) + a'^2\,(b-y)^2}{b^2}$$

$$= \frac{1}{2b^2}\int\left\{2aa'\,(by^2 - y^3) + a'^2\,(b^2y - 2by^2 + y^3)\right\}\,\delta y$$

$$= \frac{1}{2b^2}\left\{2aa'(\tfrac{1}{3}b^4 - \tfrac{1}{4}b^4) + a'^2\,(\tfrac{1}{2}b^4 - \tfrac{2}{3}b^4 + \tfrac{1}{4}b^4)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{24}a'b^2\,(2a + a');$$

$$\int\int x^3\delta x\delta y =$$

$$= \tfrac{1}{4}\int({x_2}^4 - {x_1}^4)\,\delta y$$

$$= \tfrac{1}{4}\int\delta y\,\frac{4a^3a'y^3(b-y)+6a^2a'^2y^2(b-y)^2+4aa'^3y(b-y)^3+a'^4(b-y)^4}{b^4}$$

$$= \frac{1}{4b^4}\int\left\{\begin{array}{l}4a^3a'(by^3 - y^4)+6a^2a'^2\,(b^2y^2 - 2by^3 + y^4)\\ +\;4aa'^3\,(b^3y - 3b^2y^2 + 3by^3 - y^4)\\ +\;a'^4\,(b^4 - 4b^3y + 6b^2y^2 - 4by^3 + y^4)\end{array}\right\}\,\delta y$$

$$= \frac{1}{4b^4}\left\{\begin{array}{l}4a^3a'(\tfrac{1}{4}b^5 - \tfrac{1}{5}b^5) + 6a^2a'^2\,(\tfrac{1}{3}b^5 - \tfrac{1}{2}b^5 + \tfrac{1}{5}b^5)\\ +\;4aa'^3\,(\tfrac{1}{2}b^5 - b^5 + \tfrac{3}{4}b^5 - \tfrac{1}{5}b^5)\\ +\;a'^4(b^5 - 2b^5 + 2b^5 - b^5 + \tfrac{1}{5}b^5)\end{array}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{20}a'b\,(a^3 + a^2a' + aa'^2 + a'^3);$$

$$\int\int x^2\delta x\delta y =$$

$$= \tfrac{1}{3}\int({x_2}^3 - {x_1}^3)\,\delta y$$

$$= \tfrac{1}{3}\int\delta y\,\frac{3a^2a'y^2(b-y) + 3aa'^2y\,(b-y)^2 + a'^3(b-y)^3}{b^3}$$

$$= \frac{1}{3b^3}\int\left\{\begin{array}{l}3a^2a'(by^2 - y^3) + 3aa'^2\,(b^2y - 2by^2 + y^3)\\ +\;a'^3\,(b^3 - 3b^2y + 3by^2 - y^3)\end{array}\right\}\,\delta y$$

$$= \frac{1}{3b^3}\left\{\begin{array}{l}3a^2a'\,(\tfrac{1}{3}b^4 - \tfrac{1}{4}b^4) + 3aa'^2\,(\tfrac{1}{2}b^4 - \tfrac{2}{3}b^4 + \tfrac{1}{4}b^4)\\ +\;a'^3\,(b^4 - \tfrac{3}{2}b^4 + b^4 - \tfrac{1}{4}b^4)\end{array}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{12}a'b\,(a^2 + aa' + a'^2);$$

$$\int\int x\delta y\delta x =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int({x_2}^2 - {x_1}^2)\,\delta y$$

$$= \tfrac{1}{2}\int\delta y\,\frac{2aa'y\,(b-y) + a'^2\,(b-y)^2}{b^2}$$

$$= \frac{1}{2b^2}\int\left\{2aa'\,(by - y^2) + a'^2\,(b^2 - 2by + y^2)\right\}\,\delta y$$

$$= \frac{1}{2b^2}\left\{2aa'(\tfrac{1}{2}b^3 - \tfrac{1}{3}b^3) + a'^2\,(b^3 - b^3 + \tfrac{1}{3}b^3)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{6}a'b\,(a + a');$$

$$\int\int y^3 \partial y \partial x =$$

$$= \int y^3 (x_2 - x_1) \partial y$$

$$= \int y^3 \partial y \, \frac{a'(b-y)}{b} = \frac{a'}{b} \int (by^3 - y^4) \partial y = \frac{a'}{b} (\tfrac{1}{4} b^5 - \tfrac{1}{5} b^5)$$

$$= \tfrac{1}{20} a' b^4 ;$$

$$\int\int y^2 \partial y \partial x =$$

$$= \int y^2 (x_2 - x_1) \partial y$$

$$= \int y^2 \partial y \, \frac{a'(b-y)}{b} = \frac{a'}{b} \int (by^2 - y^3) \partial y = \frac{a'}{b} (\tfrac{1}{3} b^4 - \tfrac{1}{4} b^4)$$

$$= \tfrac{1}{12} a' b^3 ;$$

$$\int\int y \partial y \partial x =$$

$$= \int y (x_2 - x_1) \partial y$$

$$= \int y \partial y \, \frac{a'(b-y)}{b} = \frac{a'}{b} \int (by - y^2) \partial y = \frac{a'}{b} (\tfrac{1}{2} b^3 - \tfrac{1}{3} b^3)$$

$$= \tfrac{1}{6} a' b^2 .$$

Vermenigvuldigt men nu de uitdrukking (b) met $x \partial x \partial y$, zoo ook met $y \partial x \partial y$, neemt men daarna de integralen der bijzondere termen, en substitueert men voor deze integralen de zoo even berekende waarden, dan komt er volgens (a):

$$\int xz \partial m = \frac{bc''}{120a'} \times \left\{ \begin{array}{l} (a - a')(2a'c - 2ac' + ac'' - a'c'')(3a + a') \\ + 2(2ac' - a'c' - a'c - ac'' + a'c'')(3a^2 + 2aa' + a'^2) \\ + 5a'(a'c - ac' + ac'' - a'c'')(2a + a') \\ + 3(c'' - 2c')(a^3 + a^2a' + aa'^2 + a'^3) \\ + 10a'(c' - c'')(a^2 + aa' + a'^2) \\ + 10a'^2 c''(a + a') \end{array} \right\},$$

$$\int yz \partial m = \frac{b^2c''}{120a'} \times \left\{ \begin{array}{l} 3(a - a')(2a'c - 2ac' + ac'' - a'c'') \\ + 2(2ac' - a'c' - a'c - ac'' + a'c'')(3a + a') \\ + 10a'(a'c - ac' + ac'' - a'c'') \\ + (c'' - 2c')(3a^2 + 2aa' + a'^2) \\ + 5a'(c' - c'')(2a + a') \\ + 10a'^2 c'' \end{array} \right\},$$

of na herleiding, en door de coëfficiënten van $c$, $c'$ en $c''$ zamen te trekken,

$$\int xz \partial m = \frac{a'bc''}{120} \left\{ c(2a + a') + c'(a + 2a') + c''(a + a') \right\}$$

$$\int yz \partial m = \frac{a'b^2c''}{120} \left\{ 2c + c' + c'' \right\};$$

daar hier voorts de massa $M$ der piramide door haren inhoud wordt voorgesteld, is

$$M = \textit{Inh. drieh.}\,\mathrm{ABC} \times \tfrac{1}{3}\mathrm{EN} = \tfrac{1}{6}\mathrm{AB} \times \mathrm{AF} \times \mathrm{EN},$$

of

$$M = \tfrac{1}{6}a'bc'',$$

waardoor wij eindelijk hebben

$$\int xz\partial m = \tfrac{1}{20}M\left\{c(2a+a')+c'(a+2a')+c''(a+a')\right\}$$

en

$$\int yz\partial m = \tfrac{1}{20}Mb\left\{2c + c' + c''\right\}.$$

Verder is de afstand van het zwaartepunt eener driehoekige piramide tot aan eenig vlak, altijd gelijk aan het vierde gedeelte van de som der afstanden, waarop de hoekpunten der piramide van dat vlak verwijderd zijn; hierdoor worden de coördinaten van dat zwaartepunt onmiddellijk uit de coördinaten der hoekpunten gevonden, zoodat zij zijn

$$x_1 = \tfrac{1}{4}(a + a') \quad \text{en} \quad y_1 = \tfrac{1}{4}b,$$

en men alzoo heeft

$$y_1 \int xz\partial m = \tfrac{1}{80}Mb\left\{c(2a+a') + c'(a+2a') + c''(a+a')\right\},$$

$$x_1 \int yz\partial m = \tfrac{1}{80}Mb\left\{2c + c' + c''\right\}(a+a');$$

volgens de vroeger gevondene voorwaarde ($\delta$) kan dus de ribbe AB der piramide eene hoofdas worden, als men heeft

$$c(2a+a')+c'(a+2a')+c''(a+a')=(2c+c'+c'')(a+a'),$$

hetgeen onmiddellijk herleid kan worden tot

$$c = c',$$

en dan aanwijst, dat de punten D en C evenver van het $xy$-vlak moeten verwijderd zijn, in welk geval de ribben AB en CD elkander regthoekig kruissen.

Wij vinden dus hier deze merkwaardige uitkomst: »Niet aan »elke willekeurige driehoekige piramide, kan door eene kracht »eene hoeksnelheid om een van hare ribben medegedeeld of ont»nomen worden, zonder dat die draaijings-as eenige uitwerking »daarvan ondervindt; maar alleen aan eene zoodanige, waarin de »tot draaijings-as genomene ribbe, door hare overstaande ribbe, »regthoekig gekruist wordt.”

Om nu nog nader de plaats te bepalen, waar de kracht moet aangebragt worden, opdat de ås van hare werking geene drukking ondervinde, bepalen wij vooreerst den afstand, waarop de oorsprong, uit A langs AB, moet verplaatst worden, opdat voor den nieuwen oorsprong de ribbe AB eene hoofd-as zij. Alzoo voor $c = c'$, de gevondene waarden van $\int xz\partial m$ en $\int yz\partial m$ over-

gaan in $\int xz\partial m = \frac{1}{20}M(a + a')(3c + c'')$,

en $\int yz\partial m = \frac{1}{20}Mb(3c + c'')$,

terwijl $x_1 = \frac{1}{4}(a + a')$ en $y_1 = \frac{1}{4}b$ is, vinden wij voor dien afstand, door de vroeger opgemaakte formule ($\varepsilon$),

$$n = \frac{1}{5}(3c + c'').$$

In Fig. 2, waar eene piramide ABCD is voorgesteld, wier ribbe

*Fig. 2.*

CD de als draaijings-as aangenomene ribbe AB regthoekig kruist, zoodat aldaar DE = CF is, behoeven wij dus slechts

$$AO = \frac{1}{5}(3c + c'') \quad \text{. . . . . . . . (c)}$$

te nemen, om den nieuwen oorsprong O te vinden, voor welken de ribbe AB eene der drie hoofdassen is, die men door dien oorsprong trekken kan. De rigting der kracht moet dus vooreerst gelegen zijn in een vlak OPQ, dat men door het punt O loodregt op de as AB kan brengen.

Verder moet de rigting der kracht, zooals wij vroeger vonden, loodregt zijn op het vlak dat door de draaijings-as en het zwaartepunt der piramide gaat, welk vlak ABR ook bepaald is door de eigenschap, dat het de ribbe CD juist in haar midden R snijdt. Indien dus OS de doorsnede der vlakken OPQ en ABR is, zal de rigting der kracht de lijn OS ergens in U regthoekig moeten snijden.

De afstand OU tusschen de rigting der kracht en de draaijings-as

AB, wordt eindelijk gevonden door de vroeger opgemaakte formule ($\beta$), waarin dan $h = \mathrm{OU}$, $n^2P = \int(x^2 + y^2)\partial m$ en $aP = M\sqrt{(x_1{}^2 + y_1{}^2)}$ is, zoodat men heeft

$$\mathrm{OU} = \frac{\int(x^2 + y^2)\partial m}{M\sqrt{(x_1{}^2 + y_1{}^2)}};$$

de verplaatsing van den oorsprong uit A naar O, heeft geenen invloed op de waarden der integralen $\int x^2\partial m$ en $\int y^2\partial m$, zoodat men met behulp der reeds vroeger gevondene uitkomsten, de waarden van die integralen, over de geheele piramide uitgestrekt, gemakkelijk kan berekenen; wij hebben namelijk, daar

$$z_2 - z_1 = \frac{c''}{a'b}\left\{(a - a')y - bx + a'b\right\} \text{ is},$$

$$\int x^2\partial m = \int\int\int x^2\partial x\partial y\partial z = \int\int x^2(z_2 - z_1)\partial y\partial x =$$

$$= \frac{c''}{a'b}\int\int x^2\partial x\partial y\left\{(a - a')y - bx + a'b\right\} =$$

$$= \frac{c''}{a'b}\left\{(a-a')\int\int x^2y\partial x\partial y - b\cdot\int\int x^3\partial x\partial y + a'b\int\int x^2\partial x\partial y\right\} =$$

$$= \frac{bc''}{60}\times\left\{\begin{array}{l}(a - a')(3a^2 + 2aa' + a'^2) \\ - 3(a^3 + a^2a' + aa'^2 + a'^3) \\ + 5a'(a^2 + aa' + a'^2)\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{a'bc''}{60}(a^2 + aa' + a'^2) =$$

$$= \tfrac{1}{10}M(a^2 + aa' + a'^2);$$

$$\int y^2\partial m = \int\int\int y^2\partial x\partial y\partial z = \int\int y^2(z_2 - z_1)\partial x\partial y =$$

$$= \frac{c''}{a'b}\int\int y^2\partial x\partial y\left\{(a - a')y - bx + a'b\right\} =$$

$$= \frac{c''}{a'b}\left\{(a-a')\int\int y^3\partial x\partial y - b\int\int xy^2\partial x\partial y + a'b\int\int y^2\partial x\partial y\right\} =$$

$$= \frac{b^3c''}{60}\left\{3(a - a') - (3a + a') + 5a'\right\} = \frac{a'b^3c''}{60}$$

$$= \tfrac{1}{10}Mb^2;$$

voorts is

$$\sqrt{(x_1{}^2 + y_1{}^2)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a^2 + 2aa' + a'^2 + b^2)},$$

en dus vinden wij

$$\mathrm{OU} = \tfrac{2}{5}\cdot\frac{a^2 + aa' + a'^2 + b^2}{\sqrt{(a^2 + 2aa' + a'^2 + b^2)}} \quad \ldots \quad (d)$$

De plaats van het middelpunt van botsing U, is door de for-

mulen (c) en (d) bepaald, en men zal dan ook in elk bijzonder geval gemakkelijk de punten kunnen bepalen, waarin de lijn, die door dit punt loodregt op het vlak van draaijings-as en zwaartepunt gesteld wordt, de zijvlakken der piramide ontmoet.

De plaats van het punt O zou men nog kunnen bepalen, door zijn afstand van het punt V, waar de draaijings-as regthoekig gesneden wordt, door een vlak dat door de ribbe CD gaat. Hiertoe als gegevens aannemende

$$AV = p \quad \text{en} \quad BV = q,$$

heeft men $c = p$ en $c'' = p + q$, dus $3c + c'' = 4p + q$, en verder

$$OV = AV - AO = p - \tfrac{1}{5}(3c + c'') = p - \tfrac{1}{5}(4p + q),$$

dat is

$$OV = \tfrac{1}{5}(p - q);$$

indien het vlak, door CD loodregt op AB gebragt, AB middendoordeelde, zou $p = q$ en dus $OV = 0$ zijn, zoodat dan het punt O juist in het midden van AB zou vallen.

De voorwaarde, dat er in eene driehoekige piramide, die om een van hare ribben wentelt, gelijk in die van Fig. 2, een middelpunt van botsing U kan aangewezen worden, blijkens het voorgaande eeniglijk zijnde, dat die ribbe en de daarovergelegene elkander regthoekig kruissen, zoo zullen aan die voorwaarde blijkbaar voldoen alle driehoekige piramiden, waarvan eene ribbe loodregt op een der zijvlakken is, mits men dan die ribbe tot draaijings-as neme. Zulk eene piramide ontstaat, wanneer men (Fig. 2) $c = c''$ stelt, waardoor het zijvlak BDC loodregt op de ribbe AB wordt; dan is $AO = \tfrac{4}{5}c'' = \tfrac{4}{5}AB$. Zulk eene piramide ontstaat echter ook, wanneer $c = 0$ gesteld wordt, waardoor het zijvlak ADC loodregt op de ribbe AB wordt; alsdan is $AO = \tfrac{1}{5}c'' = \tfrac{1}{5}AB$. Deze beide uitkomsten wijzen hetzelfde aan, namelijk dat het punt O bij eene dergelijke piramide, in de als draaijings-as dienende ribbe, op eenen afstand, gelijk aan het $\tfrac{1}{5}$ deel dier ribbe, gelegen is van het zijvlak, waarop zij loodregt staat.

Eene regthoekige driehoekige piramide, dat is eene zoodanige, waarvan drie in eenig hoekpunt zamenkomende zijvlakken aldaar regthoekig zijn, zal aan de genoemde voorwaarde voldoen, welke harer ribben men ook als draaijings-as verkiest aan te nemen; want in zulk eene piramide zal elke ribbe de overstaande regthoekig kruissen. Maar ook zonder dat eene driehoekige piramide regthoekige

zijvlakken heeft, kan zij zoodanig zijn, dat zij, voor elke ribbe als draaijings-as, aan diezelfde voorwaarde voldoet, hetgeen wij ten slotte zullen aantoonen.

Stel namelijk, dat men twee elkander regthoekig kruissende lijnen AB en CD (Fig. 1) als de rigtingen van twee ribben aangenomen heeft, en dat men, een willekeurig punt B van de eene met een willekeurig punt C van de andere vereenigd hebbende, BC als eene derde ribbe kiest, dan kan men nog door een willekeurig punt A van AB een vlak brengen, dat loodregt op BC staat, en CD ergens in D snijden zal. Indien men dan dit punt D met de punten A en B, zoomede de punten A en C met elkander, vereenigt, zal men eene piramide ABCD voltooid hebben: waarin vooreerst AB en CD elkander regthoekig kruissen; waarin ten tweede AD en BC in gelijken toestand verkeeren, omdat AD in een vlak ligt, dat loodregt op BC gebragt is; maar waarin nu ook ten derde noodzakelijk BD en AC onderling regthoekig zijn. Om dit laatste te betoogen, zullen wij gebruik maken van de reeds in de figuur aangenomene coördinaten, daarbij nu echter CF = DE = $c$ stellende, omdat CD regthoekig met AB en dus evenwijdig met het $xy$-vlak is.

De cosinussen der hoeken, die AD met de assen maakt, zijn evenredig met $a$, $b$ en $c$;
die der hoeken, welke BC met dezelfde assen maakt, zijn evenredig met $a'$, $0$ en $c'' - c$;
en dus zal men, daar de hoek van AD met BC regt en alzoo zijn cosinus nul is, hebben

$$a \times a' + b \times 0 + c \times (c'' - c) = 0$$

of

$$aa' + c(c'' - c) = 0.$$

Verder zijn de cosinussen der hoeken, die BD met de assen maakt, evenredig met $a$, $b$ en $-(c'' - c)$,
en de cosinussen der hoeken, die AC met dezelfde assen maakt, evenredig met $a'$, $0$ en $-c$;
de teller van de breuk, die den cosinus uitdrukt van den hoek, dien BD met AC maakt, is derhalve

$$aa' + c(c'' - c),$$

en daar nu deze waarde gebleken is nul te zijn, zoo volgt hieruit dat BD en AC elkander regthoekig kruissen.

# EENIGE MEETKUNDIGE STELLINGEN OVER DE INHOUDSVINDING VAN ONDERSCHEIDENE LIGCHAMEN,

DOOR

F. J. STAMKART.

# EENIGE

# MEETKUNDIGE STELLINGEN

OVER DE

# INHOUDSVINDING

VAN

# ONDERSCHEIDENE LIGCHAMEN.

De merkwaardige formule voor de *Inhoudsvinding eener uitgestrekte klasse van Ligchamen*, welke door den Heer R. Lobatto algemeen is bewezen, in de door het Genootschap uitgegeven *Wis- en Natuurkundige Verhandelingen*, 2de *Deel*, bladz. 123—166, scheen mij toe van dien aard te zijn, dat daardoor met voordeel de gewone wijze van inhoudsvinding der ligchamen in de lagere Meetkunde konde vervangen worden, bepaaldelijk voor de geknotte Piramiden, Prisma's en Kegels, de bolvormige Schijven en Segmenten, waarbij dan nog andere ligchamen uit de bedoelde klasse kunnen gevoegd worden. De eenvormigheid der uitdrukking en de omstandigheid van onveranderd bij vele ligchamen, hoedanige in de toepassingen voorkomen, te kunnen worden aangewend, zijn onloochenbare voordeelen bij het onderwijs. Om deze echter te erlangen moest de vorm van het bewijs veranderd en teruggebragt worden tot den gewonen bewijstrant der lagere meetkunde, tot de synthetische wijze van voordragt. Hiertoe strekken de 12 Stellingen, welke ik, in eene Wetenschappelijke Wintervergadering (October 1850) van het Genootschap te *Amsterdam*, mogt voor-

P 2

dragen, en die ik hiermede aan mijne Medeleden, en de beoefenaren der Wiskunde in ons Vaderland in het algemeen aanbiede. Eene bijzonderheid moge hierbij opgemerkt worden, welke bij de synthetische behandeling dadelijk in het oog valt, te weten: dat soms enkele gedeelten van den inhoud eens ligchaams, waarop de bedoelde formule ter inhoudsvinding toepasselijk is, als *negatief* moet aangemerkt worden, iets dat natuurlijk ook uit de algemeene analytische oplossing volgt, maar daarbij niet zoo terstond gezien wordt, en het eerst is opgemerkt door den Heer J. Badon Ghijsen, bij de oplossing van het 249ste Voorstel van de *Verzameling van Wiskundige Opgaven*, *Eerste Deel.*

De aanmerking bij het Gevolg der 5de Stelling gevoegd, strekt om den oorsprong van het *negatief* voorkomen van eenig gedeelte der ruimte duidelijk aan te wijzen, waarbij, wat de aldaar nader omschreven dubbele driehoekige prisma's betreft, ik gaarne gebruik gemaakt heb van eene mij vriendelijk medegedeelde opmerking door den Heer J. Badon Ghijsen.

Eindelijk kan ik hier nog bijvoegen, dat de formule reeds overlang is bekend geweest bij onze praktische Engelsche naburen. In een oud boek: *Mathematics compiled from the best Authors and intended to be the Text-Book of the course of private lectures on these sciences in the University at* Cambridge, *by* Samuel Webber d. d. a. a. etc., *President of the University at* Cambridge, tweede druk, uitgegeven in 1808, vind ik toevallig, pag. 24, voll. II:

*To find the solidity of a prismoid.*

»*Rule.* Add into one sum the areas of the two ends and 4 »times the middle section parallel to them; multiply this sum »by the height, and $\frac{1}{6}$ of the product will be the solidity. — »This rule is applicable to any prismoid, whatever be the figures »of the ends, since they may be conceived to be composed of »an indefinite number of rectangular prismoids" [waarvoor de regel bewezen is.] Van de meer algemeene toepasselijkheid van dezen regel, ook op ligchamen met gebogen zijvlakken, vinden wij echter hier niets.

1ste Stelling. (Fig. 1). *De inhoud eener Piramide is gelijk aan een zesde der hoogte, vermenigvuldigd met de som van het grondvlak en van* viermalen *een snijdend vlak evenwijdig aan het grondvlak, op de helft der hoogte van de piramide.*

Bewijs: Laat het grondvlak der piramide voorgesteld worden door G, de hoogte door $h$, en het vlak op de helft der hoogte door M: dan weet men, dat de inhoud I der piramide gevonden wordt door de uitdrukking:

$$I = \tfrac{1}{3}h.G$$

dat is:

$$I = \tfrac{1}{6}h \times (G + G).$$

Maar in elke piramide zijn de doorsneden evenwijdig aan het grondvlak, evenredig aan de tweede magten van de afstanden tot het toppunt, dus is:

$$G : M = h^2 : \tfrac{1}{4}h^2 = 4 : 1.$$

Waaruit $G = 4M.$

Bijgevolg $I = \tfrac{1}{6}h\,(G + 4M).$

2de Stelling. (Fig. 2) *De inhoud van een driehoekig Prisma, waarvan een der zijvlakken tot grondvlak genomen wordt, en dat wij daarom liggend zullen noemen, is mede gelijk aan een* zesde *van de hoogte, genomen van het onderliggende zijvlak tot de overstaande ribbe, vermenigvuldigd met de som van het grondvlak, en van* viermalen *een vlak, dat op de helft van de hoogte, het prisma evenwijdig aan het grondvlak snijdt.*

Bewijs: Laat ABCDEF een liggend driehoekig prisma voorstellen, en zij weder het grondvlak ABCD. . . . . . . . . . . $=$ G,
het snijdende vlak op de helft der hoogte GHIK . . . . $=$ M,
en de afstand der ribbe EF tot het vlak AC,
dat is de hoogte. . . . . . . . . . . . . . . . . . . $= h$.

Dan weet men vooreerst, dat de inhoud I van het prisma de *helft* is van een parallelopipedum, hebbende hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte, en dus gevonden wordt door de uitdrukking

$$I = \tfrac{1}{2}h \times G,$$

dat is:

$$I = \tfrac{1}{6}h \times (G + 2G).$$

Maar, dewijl de zijde GH $=$ KI van het snijdende vlak, juist de *helft* is der zijde AB $=$ CD van het grondvlak, terwijl de andere zijden HI en GK even lang zijn als de zijden BC en AD

van het grondvlak, zoo is:

$$G = 2M \quad \text{en} \quad 2G = 4M;$$

dus:

$$I = \tfrac{1}{6}h \times (G + 4M).$$

3de Stelling. (Fig. 3) *De inhoud van een geknot driehoekig liggend Prisma, is ook gelijk aan ⅙ der hoogte, vermenigvuldigd met de som van het onderliggend zijvlak en van* viermalen *een vlak, dat, op de helft der hoogte, het prisma evenwijdig aan het grondvlak snijdt.*

Bewijs: Het geknotte liggende prisma kan door bijvoeging of afneming eener vierhoekige piramide, of wel door bijvoeging eener driehoekige piramide, en door afneming eener andere driehoekige piramide, tot een prisma gemaakt worden. Er zijn namelijk drie gevallen te overwegen: 1°. De bovenste ribbe kan de *langste* der drie ribben zijn, dat is EF > AD en > BC. Brengt men in dit geval door het punt F, een vlak FON evenwijdig aan het vlak ABE, en verlengt men de ribben BC en AD tot aan dit vlak in N en O, dan wordt de vierhoekige piramide DCNOF tot het geknotte prisma toegevoegd, en nu is ABNOFE een driehoekig liggend prisma.

Zij weder als boven het grondvlak ABCD. . . . . . . = G,
het middenvlak op de halve hoogte GHIK. . . . . . . . = M,
de hoogte . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . = $h$;
en voorts de basis der piramide DCNO. . . . . . . . . = G′,
het middenvlak op de halve hoogte KILM. . . . . . . . = M′,
de inhoud van het geknotte prisma . . . . . . . . . . = I,
de inhoud der piramide. . . . . . . . . . . . . . . = I′,

dan is: $I + I' = \tfrac{1}{6}h\,(G + G' + 4M + 4M');$

maar ook $I' = \tfrac{1}{6}h\,(G' + 4M'),$

dus komt, aftrekkende:

$$I = \tfrac{1}{6}h\,(G + 4M).$$

2°. (Fig. 4) De bovenste ribbe kan de *kortste* zijn.

Snijdende in dit geval het geknotte prisma door een vlak FON evenwijdig aan het vlak ABE, dan heeft men, behoudens dezelfde beteekenis der letters:

$$I - I' = \tfrac{1}{6}h\,(G - G' + 4M - 4M'),$$

en

$$I' = \tfrac{1}{6}h\,(G' + 4M').$$

Dus optellende $I = \tfrac{1}{6}h\,(G + 4M).$

3°. (Fig. 5) De bovenste ribbe kan noch de langste, noch de kortste wezen.

Brengende nogmaals door het punt F, een vlak FON evenwijdig aan het vlak ABE en verlengende de ribbe BC tot aan dit vlak in N, dan ontstaan hierdoor twee driehoekige piramiden CNPF en OPDF; voegt men de eerste bij het afgeknotte prisma en trekt men de tweede piramide er van af, dan verkrijgt men het prisma ABNOFE.

Zij de inhoud der piramide CNPF $= i$,
en » » » » OPDF $= i'$,
de grondvlakken $g$ en $g'$, en de middenvlakken $m$ en $m'$, dan is:

$$I + i - i' = \tfrac{1}{6}h(G + g - g' + 4m - 4m' + 4M),$$

maar

$$i - i' = \tfrac{1}{6}h(g - g' + 4m - 4m').$$

Dus komt $I = \tfrac{1}{6}h(G + 4M)$.

Gevolg: Hieruit volgt, dat de inhoud van een geknot driehoekig prisma ook gelijk is aan *een derde* van de som der drie evenwijdige ribben, vermenigvuldigd met eene doorsnede regthoekig door de evenwijdige ribben. Want, laat de drie ribben AD, BC en EF voorgesteld worden door $a$, $b$, $c$, en de afstand der ribben AD en BC door $m$, dan is:

de zijde HI der doorsnede M op de helft der hoogte $= \dfrac{b + c}{2}$;

» » GK » » » » » » » » $= \dfrac{a + c}{2}$;

De afstand der lijnen HI en GK der doorsnede $= \dfrac{m}{2}$;

Dus is het Trapezium ABCD of $G = m \times \dfrac{a + b}{2}$,

en » » GHIK of $M = \dfrac{m}{2} \times \left(\dfrac{b + c}{4} + \dfrac{a + c}{4}\right)$.

Waaruit

$$G + 4M = m\left(\frac{a + b}{2} + \frac{b + c}{2} + \frac{a + c}{2}\right)$$
$$= m(a + b + c);$$

dus:

$$I = \tfrac{1}{6}hm(a + b + c) = \tfrac{1}{2}hm \times \left(\frac{a + b + c}{3}\right).$$

Maar $\tfrac{1}{2}h \times m$ is de doorsnede van het prisma regthoekig door de ribben; zij deze $= D$, dan is

$$I = D \times \frac{a + b + c}{3}.$$

4de Stelling. (Fig. 6) *De Inhoud van elk Ligchaam, begrepen tusschen twee evenwijdige vlakken, als grond- en bovenvlakken, en eenige zijvlakken, die het grond- en bovenvlak verbinden en het ligchaam omsluiten, is gelijk aan een zesde van de hoogte, vermenigvuldigd met de som van het grondvlak, het bovenvlak en van* viermalen *eene doorsnede van het ligchaam, genomen op de helft der hoogte, evenwijdig aan het grond- en bovenvlak.*

Bewijs: Daar het grond- en bovenvlak van het voorgestelde ligchaam evenwijdige vlakken zijn, zoo moeten ook de zijvlakken elk twee evenwijdige zijden hebben en dus Trapezia zijn, en het grond- en bovenvlak moeten gelijkhoekige figuren zijn. Een of meerdere zijden aan het boven- of grondvlak kunnen echter ook $= 0$ zijn, en in dat geval zijn even zoovele zijvlakken driehoeken. Zij nu in Fig. 6 zulk een ligchaam afgebeeld, begrepen tusschen een vijfhoekig grond- en bovenvlak en vijf trapezia tot zijvlakken.

Men trekke uit de hoekpunten F, G, H, I, K van het bovenvlak even zoovele evenwijdige lijnen naar het grondvlak, F$a$, G$b$, H$c$, I$d$, K$e$ en vereenige de punten $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, door regte lijnen op het grondvlak, dan zal daardoor eene figuur $abcde$ ontstaan, die gelijk en gelijkvormig aan het bovenvlak is. Verder vereenige men de hoekpunten van het grondvlak met de overeenkomstige hoeken van het geprojecteerde bovenvlak, door de lijnen A$a$, B$b$, C$c$, D$d$, E$e$, dan is het geheele ligchaam verdeeld in een prisma $abcde$FGHIK, dat de kern zoude kunnen genoemd worden, en vijf afgeknotte driehoekige liggende prisma's, AB$ba$FG, BC$cb$GH enz., die om de kern heen staan.

Laat nu $g$, $g'$, $g''$, $g'''$, $g''''$ de grondvlakken dezer prisma's zijn, $m$, $m'$, $m''$, $m'''$, $m''''$ de doorsneden op de helft der hoogte, evenwijdig aan het grond- en bovenvlak;
het geheele grondvlak ABCDE . . . . . . . . . . . . $= G$,
de doorsnede van het geheele ligchaam op de helft der hoogte $= M$,
het bovenvlak FGHIK $= abcde$. . . . . . . . . . . . $= B$,
de hoogte . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $= h$;

Dan is: 1°. $G = g + g' + g'' + g''' + g'''' + B$,

2°. $M = m + m' + m'' + m''' + m'''' + B$.

Nu heeft men:

het middelste prisma of de kern $= h \times B = \frac{1}{6} h(B + 4B + B)$,
het 1ste geknotte drieh. prisma ABBbaGF $= \frac{1}{6} h(g + 4m)$,
» 2de » » » BCcbHG $= \frac{1}{6} h(g' + 4m')$,
» 3de » » » CDdcIH $= \frac{1}{6} h(g'' + 4m'')$,
» 4de » » » DEedKI $= \frac{1}{6} h(g''' + 4m''')$,
» 5de » » » EAaeFK $= \frac{1}{6} h(g'''' + 4m'''')$,

optellende komt: Ligchaam ABCDEFGHIK $= \frac{1}{6} h(G + 4M + B)$.

Aanmerking. Het kan gebeuren, dat het geprojecteerde bovenvlak *abcde* niet, zoo als in de figuur is geteekend, *geheel* op het grondvlak valt, maar voor een gedeelte er buiten. Dit b. v. zoude het geval kunnen zijn, indien de zijden FG en KI langer waren dan de overeenkomstige zijden AB en ED van het grondvlak. Hierdoor echter zoude het bewijs geene andere verandering ondergaan, dan dat een of meer der grondvlakken $g$, der overeenstemmende middenvlakken $m$, en der bijbehoorende geknotte liggende prima's als *negatief* zouden voorkomen, zoodat het besluit der redenering onveranderd blijft.

Indien daarentegen een of meerdere zijden van het bovenvlak $= 0$ zijn, dan zouden de liggende prima's, die in die zijden eindigen, in piramiden zijn overgegaan, en dus ook het bewijs onveranderd doorgaan.

1ste Gevolg. Wanneer al de opstaande ribben aan het ligchaam, AF, BG, CH, DI, EK, verlengd zijnde, zich in één punt ontmoeten, dan is het beschouwde ligchaam eene afgeknotte piramide. Dit is een bijzonder geval der bewezene stelling. Dus is ook:

Inh. Gekn. Piramide $= \frac{1}{6} h(G + 4M + B)$.

2de Gevolg. De geknotte kegel de grens zijnde waartoe eene geknotte piramide nadert, wanneer de zijden van grond- en bovenvlak kleiner worden en in aantal toenemen, zoo volgt, dat ook de inhoud eens geknotten kegels door dezelfde formule gevonden wordt.

Bepaling. Wanneer de opstaande ribben eener piramide, en de zijvlakken over het toppunt verlengd worden, en deze verlengde ribben en zijden door een vlak evenwijdig aan het grondvlak der piramide gesneden worden, dan ontstaat er eene piramide boven het toppunt, die wij ten aanzien der oorspronkelijke piramide, *tegengesteld* zullen noemen. Eene piramide en hare tegengestelde

te zamen, zullen wij eene *dubbele* piramide noemen. Dezelfde benamingen zullén ook voor de kegels gebezigd worden.

AANMERKING. Eene dubbele piramide behoort eigentlijk tot de geknotte piramiden, in eene meer algemeene opvatting van het denkbeeld.

5de STELLING. *De inhoud eener dubbele Piramide wordt ook gevonden door het* zesde *der hoogte te vermenigvuldigen met de* som *van het grond- en bovenvlak en van* viermalen *een snijdend vlak op de helft der hoogte, evenwijdig aan het grond- en bovenvlak.*

BEWIJS: (Fig. 7) Hiertoe zullen wij aanvangen met de waarheid van het gestelde aan te toonen voor eene *driehoekige* dubbele piramide. Zij ABCDEFG de dubbele driehoekige piramide. Men trekke evenwijdig aan eene der opgaande ribben, b. v. BE, door de hoekpunten F en G, waar de andere ribben eindigen, de lijnen FI en GH tot aan het grondvlak, waar zij de verlengde AB en BC ontmoeten. Hierdoor ontstaat een prisma BHIFGE. Men trekke de lijn FK evenwijdig aan de ribbe GC tot in K, waar zij de verlengde AC ontmoet. Eindelijk trekke men de lijn KI, welke evenwijdig aan BC zijn zal, omdat KC en IH gelijk en evenwijdig aan FG zijn. Hierdoor ontstaat een ander driehoekig prima CGHIFK en ook eene driehoekige piramide AIKF.

Nu is het duidelijk, dat de dubbele piramide ABCDEFG, gelijk is aan de piramide AIKF + prisma BHIFGE — prisma CGHIKF.

Zij weder het grondvlak der dubbele piramide ABC = G,
» bovenvlak » » » EFG = B,
» middenvlak » » » *abc* = M.

Zij nog het Trapezium KCBI = $g$, en *kcbi* = $m$,
dan is het grondvlak AIK = G + $g$,
» middenvlak *aik* = M + $m$.

Dus piramide AIKF. . . = $\frac{1}{6}h(G + g + 4M + 4m)$,
en prisma BHIFGE. . . . = $\frac{1}{6}h(B + 4B + B)$.

Maar het grondvlak KCHI = $g$ + B,
» middenvlak *kchi* = $m$ + B,
dus prisma CGHIKF . . . = $\frac{1}{6}h(g + B + 4m + 4B)$.

Optellende en aftrekkende komt:
dubbele piramide ABCDEFG = $\frac{1}{6}h(G + 4M + B)$.

De stelling alzoo voor eene dubbele driehoekige piramide be-

wezen zijnde, zoo volgt onmiddellijk, dat zij voor alle dubbele piramiden doorgaat. Iedere dubbele piramide toch, b. v. de vierhoekige ABCDF*abcd* (Fig. 8) kan in aan elkander sluitende dubbele driehoekige piramiden verdeeld worden. Men trekke daartoe b. v. de lijn MT*m* van het grondvlak door het toppunt naar het bovenvlak, en vereenige de punten A en M, *a* en *m*, B en M, *b* en *m*, C en M, *c* en *m* enz., dan zal de verdeeling der dubbele piramide ABCDF*abcd* in vier dubbele driehoekige piramiden gedaan zijn, welke allen dezelfde hoogte als de voorgestelde piramide hebben.

GEVOLG. De inhoud eens dubbelen kegels wordt insgelijks gevonden door de formule

$$I = \tfrac{1}{6} h (G + 4M + B).$$

AANMERKING. De bekende uitdrukking om den inhoud eener geknotte piramide, of van eenen geknotten kegel te berekenen, te weten: $I = \tfrac{1}{3} h (G + \sqrt{GB} + B)$,
gaat *niet* onveranderd door voor de dubbele piramide of den kegel, maar wordt voor deze ligchamen

$$I = \tfrac{1}{3} h (G - \sqrt{GB} + B).$$

De reden hiervan is, dat, wanneer men het bovenvlak eener geknotte piramide steeds hooger neemt, en voorbij het toppunt brengt, bij den overgang van dit vlak door het toppunt, $\sqrt{B}$ *negatief* wordt: dus *verandert* $\sqrt{G} \times \sqrt{B}$ dan *van teeken*, terwijl $\sqrt{B} \times \sqrt{B}$ of B *hetzelfde teeken behoudt.*

Met het middenvlak M is dit niet alzoo gelegen, want dit vlak, steeds op de helft der hoogte van de piramide zijnde, wordt niet *nul*, bij den overgang van de afgeknotte tot de dubbele piramide. En wanneer eenmaal de dubbele piramide zoo hoog is geworden, dat het middenvlak van de regte tot de tegengestelde piramide overgaat, dan verandert daarbij wel $\sqrt{M}$ van teeken, maar $M = \sqrt{M} \times \sqrt{M}$ blijft *positief.*

GEVOLG. De inhoud van elk ligchaam, dat tusschen twee evenwijdige vlakken zamengesteld kan worden uit de som van piramiden, zoowel enkele-, dubbele- als afgeknotte piramiden, prisma's, kegels en cilinders, hebbende allen hun grond- en bovenvlak in de genoemde evenwijdige vlakken, kan door denzelfden, meermalen gemelden regel gevonden worden. Hetzelfde besluit geldt ook voor een ligchaam, dat door de optelling van eenige, en aftrekking

van een of meerdere andere piramiden, prisma's, kegels en cilinders, hebbende allen dezelfde hoogte, ontstaan is.

Aanmerking. Bij ligchamen, die enkel uit zamenvoeging en optelling van piramiden en prisma's ontstaan zijn, moet men bedacht wezen, dat bij verplaatsing van het bovenvlak, soms een gedeelte der ruimte dubbel of meervoudig kan voorkomen, behoorende tot twee of meer zamengevoegde piramiden, prisma's, enz. Indien b.v. in Fig. 7, het ligchaam AIHC*chia* beschouwd wordt, dan is dit blijkbaar gelijk aan de som der afgeknotte piramide ABC*cba* en het prisma BHI*hib*. Tot op de hoogte van het toppunt D gaan piramide en prisma ieder afzonderlijk; de grond- en bovenvlakken van het ligchaam zijn dan gelijk aan de som der grond- en bovenvlakken der piramide en van het prisma. Maar boven het toppunt D treedt het prisma, eerst *gedeeltelijk* en daarna, hooger op, *geheel* in de tegengestelde piramide; en in het bovenvlak des ligchaams ligt dan het bovenvlak der dubbele piramide geheel, of voor een deel op het bovenvlak des prisma's.

Ten andere moet men ook in acht nemen, dat, als een ligchaam uit optelling en aftrekking van piramiden en prisma's ontstaan is — waarbij begrepen wordt, dat de ruimte, die bij de zamenstelling dubbel voorkomt, door de aftrekking weder tot eene enkelvoudige ruimte moet teruggebragt worden — het echter gebeuren kan, dat een gedeelte der ruimte *alleen* tot het af te trekken ligchaam behoort, in welk geval dit gedeelte als *negatief* moet beschouwd worden, en als zoodanig in den bewezenen regel ter inhoudsvinding begrepen is. In het algemeen kan geen der beide gevallen voorkomen, dan wanneer het bovenvlak des ligchaams gelegen is *boven* de snijding van twee of meer der opgaande ribben der zijvlakken in een of meer punten. Het bovenvlak onder, of juist ter hoogte van het laagste punt van doorsnijding van twee opgaande ribben gelegen zijnde, gaat het Gevolg der 5de Stelling steeds *letterlijk* door; boven dit punt of die punten kan soms de beteekenis eene gewijzigde zijn, dierwijze, dat optellen in aftrekken verandert of omgekeerd; met andere woorden men moet steeds door *inhoud des ligchaams* de *algebraïsche som* verstaan der inhouden van de piramiden, kegels en cilinders enz., uit wier zamenvoeging het ligchaam kan begrepen worden ontstaan te zijn. Ter opheldering dient het volgende:

Een vierhoekig liggend prisma ABCDGHIK (Fig. 9), kan beschouwd worden als de som van twee driehoekige liggende prisma's en van een parallelopipedum: men trekke slechts — volgens de constructie bij het bewijs der 4de Stelling gebruikt — in de staande boven- en grondvlakken van het prisma de evenwijdige lijnen GL, HM, KN, IO, en brenge daardoor evenwijdige vlakken GN en HO, dan heeft men duidelijk:

Prisma ABCDGHIK = Prisma ALGKDN + Prisma BMHICO + Parallelopipedum GHMLNOIK $= \frac{1}{6}h(G + 4M + B)$.

Verlengt men echter de beide zijvlakken ADFE en BCFE voorbij de lijn EF, en brengt men een evenwijdig vlak aan ABCD, namelijk A'B'C'D', door deze verlengde zijvlakken, dan ontstaat er nog een driehoekig prisma, waarvan A'EB' het staande grondvlak is. De vereeniging van beide driehoekige prisma's op AEB en A'EB' kan men een *dubbel-driehoekig prisma* noemen, maar eigentlijk is het een *vierhoekig* prisma met ABB'A' tot bazis, zijnde een vierhoek, waarvan twee zijden AA' en BB' zich in E tusschen de andere zijden AB en A'B' snijden. Het bovenvlak A'B'C'D' van dit ligchaam moet nu ten aanzien van het grondvlak ABCD als *negatief* beschouwd worden; want de lijnen A'B' en D'C' loopen blijkbaar in tegengestelde rigting van AB en DC, terwijl AD en A'D', BC en B'C' dezelfde rigtingen hebben. Het bovenvlak

$$B = A'B' \times A'D',$$

is dus *negatief* ten opzigte van het grondvlak

$$G = AB \times AD.$$

Wanneer A'B' > AB is, en alzoo het middenvlak M boven EF komt, dan zal om dezelfde reden ook M *negatief* zijn ten opzigte van G.

Trekt men nu ook de evenwijdige lijnen AL' en BM', dan blijkt uit de figuur dat

$\triangle AEB - \triangle A'EB' = \triangle AAL' + \triangle BBM' -$ Parallelogr. A'B'M'L' is; dus ook:

Prisma op AEB — Prisma op A'EB' = Prisma op AAL' + Prisma op BB'M' — Parallelopipedum op A'B'M'L'.

Het bovenvlak, dat, zoolang GHIK onder de lijn EF was, moest opgeteld worden, moet nu worden afgetrokken; en men heeft nu blijkbaar:

Prisma op AEB — Prisma op A'EB' $= \frac{1}{6}h(G + 4M - B)$,

zoo lang namelijk A'B' < AB is; maar

Prisma op AEB — Prisma op A'EB' $= \frac{1}{6}h(G - 4M - B)$,
wanneer A'B' > AB is geworden, of liever, daar in dit geval het tweede prisma grooter is geworden dan het eerste:

Prisma A'EB' — Prisma AEB $= \frac{1}{6}h(B + 4M - G)$.

Men kan dan het middenvlak M steeds als *positief* in rekening brengen, door het grootste der beide vlakken AC en A'C' als grondvlak aan te nemen.

Om aan te wijzen, dat bij het toepassen der formule $\frac{1}{6}h(G + 4M + B)$ het omgekeerde driehoekige prisma, *negatief* is, kan men ook nog op deze wijze te werk gaan:

Zij in Fig. 10 alleen het staande grondvlak des prisma's voorgesteld, ABHG van het gewoon vierhoekig prisma, ABB'A' van het dubbel driehoekige. Men trekke eene lijn BIK evenwijdig aan AE en verlenge de lijnen GH en B'A' tot aan deze lijn, dan blijkt uit de figuur, dat men heeft:

Prisma op ABHG = Parallelopipedum op ABIG — Prisma op HBI.

Komt het bovenvlak B echter boven E, dan heeft men evenzoo:
Prisma op ABB'A' = Parallelopipedum op ABKA' — Prisma op B'BK, dat is dus:

Prisma op ABB'A' = Prisma op ABE — Prisma op B'EA'.

Even zoo blijkt ook het *negatief* zijn van het boven- of middenvlak zoodra het boven E komt, want men heeft

1°. onder E, GH = GI — HI, en dus, op dezelfde wijze
2°. boven E, BA' = A'K — B'K.

Zoo men in Fig. 11 de opstaande vlakken van het geknotte prisma ABCDEF boven de lijn EF verlengt, het geheel door een vlak evenwijdig aan het grondvlak ABCD afsluit, en aldus een afgeknot-liggend-dubbel-driehoekig-prisma vormt, dan bestaat dit uit het *geheele* dubbele-prisma ABNOEFO'N'B'A' met *aftrekking* der piramide FCDNO en *bijvoeging* der omgekeerde piramide FD'C'N'O'.

Laat G', M' en B' het grond-, midden- en bovenvlak van het *geheele* dubbele prisma zijn.

*g*, *m* en *b* de overeenkomstige vlakken der dubbele piramide, en

G, M en B de grond-, midden- en bovenvlakken van het *geknotte* dubbele prisma, dan heeft men:

Prisma ABNOEF — omgek. Prisma $A'B'N'O'EF = \frac{1}{6}h(G' + 4M' - B')$,
Piramide FDCNO + omgek. Piramide $FD'C'N'O' = \frac{1}{6}h(g + 4m + b)$;
aftrekkende komt:

$$\text{Prisma ABNOEF} - \text{Piramide FDBNO}$$
$$-\{\text{omgek. Prisma } A'B'N'O'EF + \text{omgek. Piramide } F'D'C'N'O'\}$$
$$= \tfrac{1}{6}h(G' - g + 4(M' - m) - (B' - b));$$

dat is:

$$\text{Geknot Prisma ABCDEF} - \text{geknot omgek. Prisma } A'B'C'D'EF$$
$$= \tfrac{1}{6}h(G + 4M - B).$$

Zoo het middenvlak boven de lijn EF komt, is ook M *negatief*.

Dit geval is dus overeenkomstig met het eerst overwogene van het *dubbele-prisma;* ook nu is het bovenvlak B *negatief*.

Indien men in Fig. 12 de zijvlakken verlengt boven de lijn EF, en dan een evenwijdig vlak aan ABCD aanbrengt ter vorming van een afgeknot-liggend-dubbel-driehoekig-prisma, even als bij de voorgaande figuur ondersteld is, met het onderscheid, dat nu de lijn EF korter dan elk der andere zijden AD en BC is, dan moet bij het geheele dubbele-prisma de piramide FDCNO *bijgevoegd* en hare omgekeerde FD'C'N'O' *afgetrokken* worden om het *geknotte-dubbele* prisma te vormen.

Behoudens dezelfde beteekenissen der letters, heeft men alzoo:
Prisma ABNOEF — omgek. Prisma $A'B'N'O'EF = \frac{1}{6}h(G' + 4M' - B')$,
Piramide FDCNO + omgek. Piramide $FD'C'N'O' = \frac{1}{6}h(g + 4m + b)$.

Alsnu optellende, komt:

$$\text{Prisma ABNOEF} + \text{Piramide FDCNO}$$
$$-\{\text{omgek. Prisma } A'B'N'O'EF - \text{omgek. Piramide } FD'C'N'O'\}$$
$$= \tfrac{1}{6}h(G' + g + 4(M' + m) - (B' - b)),$$

dat is, zoo lang $B' > b$ is,

$$\text{Geknot Prisma ABCDEF} - \text{geknot omgek. Prisma } A'B'C'D'EF$$
$$= \tfrac{1}{6}h(G + 4M - B).$$

Het bovenvlak $A'B'C'D'$ is nu *negatief* in de formule $\frac{1}{6}h(G + 4M + B)$, omdat het bestaat uit de algebraïsche som van het *negatieve* vlak $A'B'N'O'$ en van het *positieve* vlak $D'C'N'O'$, welk laatste kleiner dan het eerste is. Wanneer men echter het bovenvlak hooger brengt, dan wordt de zijde $A'D'$ *kleiner*, *nul* en ten laatste *negatief*. De zijde $A'D'$ is *nul*, wanneer het bovenvlak door het snijpunt M der lijnen AE en DF gaat. Op dit oogenblik is het vierhoekige bovenvlak een driehoek geworden. Kiest men het bovenvlak nog

hooger, dan komt D′ links van A′, terwijl, vooreerst nog, C′ regts van B′ blijft; dan bestaat het bovenvlak B uit *twee driehoeken*, of liever, dan is het een vierhoek geworden, waarvan de overstaande zijden A′B′ en C′D′, zich snijden tusschen de twee andere zijden A′D′ en B′C′. Van dezen vierhoek is de (geschaduwde) driehoek, die B′C′ tot zijde heeft, *negatief* gebleven, terwijl de andere driehoek, met de negatieve zijde A′D′, *positief* is geworden, zoo als dit ligtelijk blijkt uit de uitdrukking,

Vierh. A′B′C′D′ = Vierh. D′C′N′O′ — Vierh. A′B′C′D′ $= b - B'$.

Zijn beide driehoeken met de zijden A′D′ en B′C′ aan elkander gelijk, dat is: wanneer $B' = b$ is, dan is $B = 0$.

Brengt men het bovenvlak nog hooger, dan wordt $b > B'$ en alzoo $b - B' = B$ weder *positief*.

Gaat het bovenvlak door het punt L, waar de verlengde ribben BE en CF elkander snijden, dan is B wederom een *driehoek* die geheel *positief* is.

Boven het punt L wordt ook de zijde B″C″ *negatief*, even als de zijden C″D″ en B″A″, en ook de *afstand* der zijden A″D″ en B″C″ reeds waren van de lijn EF af. Het bovenvlak B is en blijft nu verder, hooger op, steeds *positief*.

Indien het middenvlak nog onder de lijn EF is, dat is: nog *positief* is, dan heeft men blijkbaar: voor den inhoud van het *afgeknotte dubbele-prisma*, weder de uitdrukking

$$I = \tfrac{1}{6}h(G + 4M + B)$$

= Geknot Prisma ABCDEF + Ligchaam A″B″C″D″ML — Pir. EFML.

Komt het middenvlak M in en boven de lijn EF, dan wordt ook dit eerst 0, dan *negatief*, daarop weder 0, en dan *positief*, even als dit met het bovenvlak B aangetoond is. De driehoekige piramide is dus alleen, wat de ligchamelijke inhouden betreft, als *negatief* te beschouwen, alsmede alle doorsneden, welke evenwijdig aan het grondvlak door deze piramide gaan, voor zoo veel de vlakte inhouden betreft.

Beschouwen wij eindelijk het geval in Fig. 13 voorgesteld, wanneer de lengte der ribbe EF van het liggend geknot prisma tusschen de lengte der beide andere ribben begrepen is. De verlengden der ribben FD,AE en FC,BE snijden zich nu de eerste in M onder de lijn EF; de tweede in L boven de lijn EF. Het geknotte driehoekige prisma ABCDEF ontstaat nu uit het prisma

ABNOEF door *bijvoeging* der piramide FNCP en *aftrekking* der piramide FODP; aldus:

Geknot Prisma ABCDEF = Prisma ABNOEF + Pir. FNCP — Pir. FDPO.

Bij de omgekeerde ligchamen wordt het omgekeerde prisma *negatief*, maar de beide omgekeerde piramiden blijven *positief*, dus heeft men:

$$-\text{ Omgekeerd Geknot Prisma } A'B'C'D'EF = -\text{ Prisma } A'B'N'O'EF$$
$$-\text{ Piramide } FD'P'O' + \text{ Piramide } FN'C'P'.$$

Zoo lang nu het bovenvlak boven EF en onder het snijpunt L ligt, is het in zijn geheel als *negatief* te beschouwen, en dit is even zoo het geval met het middenvlak; te weten, dan is:

$$B \text{ of } M = -A'B'N'O' + C'N'P' - O'P'D' = -A'B'C'D'.$$

Komt het bovenvlak ter hoogte van het snijpunt L, dan wordt de zijde $B'C' = 0$, en dus verandert het vlak in een' driehoek.

Boven het snijpunt L is de zijde B'C' *negatief* geworden = B'''C''', en alsnu is het bovenvlak zamengesteld uit twee driehoeken QB'''C''' en QA'''D''', waarvan de eerste *positief*, de tweede *negatief* is, gelijk dit duidelijk blijkt uit de uitdrukking

$$B = -A'''B'''N'''O''' + C'''N'''P''' - O'''P'''D'''$$
$$= + C'''B'''Q - A'''D'''Q.$$

Bij eene plaatsing van het bovenvlak tusschen de lijn EF en het punt L, heeft men alzoo, zoo lang M onder EF blijft:

$$\text{GeknotPrisma}ABCDEF - \text{GeknotPrisma}A'B'C'D'EF = \tfrac{1}{6}h(G + 4M - B).$$

Komt M boven EF dan wordt ook M *negatief*.

Is het bovenvlak boven het snijpunt L gelegen, dan zal B *positief* of *negatief* zijn, al na dat $\triangle C'''B'''Q$ *grooter* of *kleiner* dan $\triangle A'''QD'''$ is. — Dezelfde regel geldt ook voor M; — en dan geeft de uitdrukking

$$\tfrac{1}{6}h(G + 4M + B),$$

de waarde van

$$\text{GeknotPrisma}ABCDEF + \text{Piramide}LB'''C'''Q - \text{Ligchaam}EFD'''QA'''L.$$

Men kan nog opmerken, dat als men in de beschouwde Figuren 9, 11, 12 en 13, het grondvlak naar opvolging der letters rondgaat, van A naar B, van B naar C, van C naar D en van D weder naar A, deze rondgaande beweging, — zoo als de letters geplaatst zijn — eene is, die genoemd wordt *tegen-zon;* maar dat, als men eenig *negatief* bovenvlak, b.v. van Fig. 9 rondgaat,

volgens de opvolging der overeenkomstig staande letters A′, B′, C′, D′, deze rondgaande beweging geschiedt *met-zon*, eene juist omgekeerde rigting. Verder ziet men, dat in het weder *positief* geworden bovenvlak A″B″C″D″ van Fig. 12, de rondgaande beweging ook *weder geworden is tegen-zon;* en eindelijk, dat wij een bovenvlak, dat gedeeltelijk *positief* en gedeeltelijk *negatief* is, zoo als het vlak A′B′C′D′ bij Fig. 12, of A‴B‴C‴D‴ van Fig. 13, de omgang volgens de orde der letters om het *positief* deel geschiedt *tegen-zon*, even als bij de grondvlakken, en om het *negatief* deel, *met-zon*, dat is juist omgekeerd. Hierin is aldus een gemakkelijk middel gelegen, om te onderscheiden of een boven- of middenvlak geheel of gedeeltelijk als *negatief* moet in rekening gebragt worden.

Als een ander voorbeeld, hoe door de zamenvoeging van Piramiden, Prisma's enz. tot een enkel ligchaam, ook ligchamelijke ruimten en doorsneden kunnen ontstaan die als *negatief* aangemerkt moeten worden; zoodra de piramiden in dubbele zijn overgegaan, zullen wij ook nog een ligchaam, zoo als in Fig. 6 is afgebeeld, nader beschouwen.

Wanneer men de vlakken AF*a*, BG*b*, CH*c*, DI*d* enz. verlengt tot dat twee opvolgende elkander snijden, dan kan het ligchaam aangemerkt worden te bestaan uit de som van vijf afgeknotte piramiden, *min* een prisma, dat aan die piramiden gemeen is, waar de ruimte dubbel geteld is. — Zij Fig. 14 het grondvlak van het ligchaam in Fig. 6 afgebeeld: F, G, H, I, K de vijf punten waar de verlengde lijnen A*a*, B*b* enz. elkander snijden, dan volgt uit de figuur

Grondvl. ABCDE $= \triangle AFB + \triangle BGC + \triangle CHD + \triangle DIE + \triangle EKA$
$- $ Vijfh. FGHIK

Bovenvl. $abcde = \triangle aFb + \triangle bGc + \triangle cHd + \triangle dIe + \triangle eKa$
$-$ Vijfh. FGHIK.

Het ligchaam is alzoo gelijk aan de som der afgeknotte piramiden, die ABF, BGC, CHD, DIE en EKA tot grondvlakken hebben, en de driehoeken, *ab*F, *b*G*c*, *c*H*d*, *d*I*e* en *e*K*a* tot bovenvlakken, *min* het prisma, dat den vijfhoek FGHIK tot grondvlak heeft.

Wanneer men zich nu voorstelt dat het bovenvlak des ligchaams steeds hooger genomen wordt, dan zal tot aan het *laagste* toppunt der 5 piramiden, b.v. K, alles onveranderd hetzelfde blijven.

Komt echter het bovenvlak nog hooger, dan zal er tot aan het *hoogste* toppunt der piramiden, b.v. I., een gedeelte der ruimte zijn, die tot *geene* der dubbele piramiden behoort, maar wel tot het vijfhoekige prisma. Dit prisma, afgetrokken moetende worden, zal de bedoelde ruimte ook *negatief* voorkomen. Men kan zich hiervan het best overtuigen door van het *laagste* toppunt K tot het hoogste toppunt I eenige doorsneden te teekenen. In elk dezer doorsneden komt dan een *negatief* vlak voor, dat eerst klein is, vervolgens grooter wordt, totdat het gelijk staat aan het overblijvende *positieve* deel der doorsnede, en aldus een snijdend vlak geeft, waarvan de waarde = 0 is. — Hierop verkrijgt het *negatieve* gedeelte de *overhand*. Het *positieve* vlak verdwijnt geheel, maar komt daarna weder te voorschijn, wordt grooter, en nogmaals ontstaat er eene waarde = 0, voor de doorsnede. Verder op wordt het *positieve* vlak nog *grooter*, het *negatieve* steeds *kleiner* en van het hoogste toppunt I af, is het *negatieve* vlak geheel verdwenen. De doorsnijding valt alsnu geheel in de tegengestelde piramiden. — De hierbij gevoegde 10 doorsneden Fig. 14*, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, kunnen tot opheldering dezer redenering dienen. In elk dier doorsneden is het *negatieve* vlak geschaduwd. —

In de Fig. *a* stelt de vijfhoek 1.2.3.4.5 b.v. het grondvlak, en de kleinere vijfhoek, insgelijks door 1.2.3.4.5 aangewezen, het bovenvlak voor; 1.9, 2.8, 3.7, 4.6, 5.10 zijn de projectiën der vijf opgaande ribben; 6, 7, 8, 9, 10 de projectiën der punten, waar die ribben zich twee aan twee snijden. Fig. *b* is eene doorsnede, genomen op de hoogte van het punt I; de punten 2, 3 en 7 vallen daar in één, en de lijn 4.5 is van rigting omgekeerd, waaruit een *negatief* deel van het bovenvlak ontstaan is. Fig. *c* geeft eene doorsnede iets hooger, waarbij, behalve de zijde 4.5, ook de zijde 3.2 omgekeerd is, en het geheele bovenvlak *negatief* is geworden. Hierbij ziet men weder, dat de *rangorde van opvolging* der cijfers 1.2.3.4.5 geheel is *omgekeerd*. In Fig. *d* is dit mede het geval, terwijl nu ook de zijde 1.2 omgekeerd gerigt is. Het geheele vlak is nog *negatief*. In Fig. *e* is de zijde 1.5 *nul* geworden; de punten 1.5 en 9 zijn in een gevallen; een gedeelte van het bovenvlak is weder *positief*, en de waarde van het geheele vlak kan = 0 zijn. Fig *f*, *g* en *h* stellen weder verdere, hooger genomen bovenvlakken voor, die

allengs grooter worden: met uitzondering der zijde 4.3 loopen alle overige zijden in tegengestelde rigting van de oorspronkelijke in Fig. *a*. Het *negatieve* deel van het bovenvlak wordt steeds kleiner. In Fig. *i* is de binnenste vierhoek 1.2.(4.3).5 de afteekening eener doorsnede op de hoogte van het punt 6; de zijde 3.4 is hier $= 0$ en het bovenvlak weder geheel *positief* geworden. De buitenste vijfhoek 1, 2, 3, 4, 5 stelt eindelijk een bovenvlak voor, dat boven het punt 6 genomen is; al de zijden loopen hier in tegengestelde rigting van de oorspronkelijke in *a*. De rangorde van opvolging der punten 1, 2, 3, 4, 5, wanneer men den veelhoek langs gaat, heeft zich echter geheel hersteld: het bovenvlak is *positief*.

Men herkent in de voorgaande ontwikkeling duidelijk den loop eener tweedemagts uitdrukking, die in twee bestaanbare factoren ontbonden kan worden, en het is ligt in te zien, dat de uitdrukking van den inhoud eener doorsnede, in functie van hare hoogte, juist eene zoodanige zijn moet: want laat $a$, $a'$, $a''$, $a'''$ en $a''''$ (Fig. 14) de vijf hoogten der toppunten van de piramiden boven het grondvlak voorstellen, $x$ de hoogte eener doorsnede, $b^2$ de vlakte-inhoud van den vijfhoek FGHIK, $g$, $g'$, $g''$, $g'''$, $g''''$ de grondvlakken der vijf piramiden, en $y$ eene doorsnede, dan zal men hebben:

$$y = g.\frac{(a-x)^2}{a^2} + g'.\frac{(a'-x)^2}{a'^2} + g''.\frac{(a''-x)^2}{a''^2} + g'''.\frac{(a'''-x)^2}{a'''^2} + g''''.\frac{(a''''-x^2)}{a''''^2} - b^2$$

$$= (g+g'+g''+g'''+g''''-b^2)$$
$$- 2\left(\frac{g}{a}+\frac{g'}{a'}+\frac{g''}{a''}+\frac{g'''}{a'''}+\frac{g''''}{a''''}\right)x$$
$$+ \left(\frac{g}{a^2}+\frac{g'}{a'^2}+\frac{g''}{a''^2}+\frac{g'''}{a'''^2}+\frac{g''''}{a''''^2}\right)x^2$$
$$= G - 2Px + Qx^2 = Q(m-x)(n-x).$$

Tusschen de grenzen $x = m$ en $x = n$ is $y$ *negatief;* voor $x = m$ en $x = n$ is $y = 0$; voor $x$ grooter dan $m$ en $n$ is $y$ weder *positief*.

Is $b = 0$ en $a = a' = a'' = a''' = a''''$, dan wordt

$$y = (g+g'+g''+g'''+g'''')\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 = G\left(1-\frac{x}{a}\right)^2.$$

Nu is alzoo $m = n$, het *negatieve* vlak is verdwenen, en het ligchaam zelf eene afgeknotte of dubbele piramide.

Hulpstelling. *Indien twee ligchamen met evenwijdige grond- en bovenvlakken dezelfde hoogte hebben; indien de grondvlakken der beide ligchamen eene gelijke grootte hebben en ook de bovenvlakken even groot zijn; en indien ten laatste de doorsneden genomen op dezelfde hoogte, evenwijdig aan de grond- en bovenvlakken in beide ligchamen gelijk van grootte zijn, dan zullen die twee ligchamen, welke ook overigens hunne gedaante wezen moge*, gelijk van inhoud *zijn*.

Bewijs: Er zijn hier in het algemeen drie gevallen mogelijk, te weten: of de evenwijdige doorsneden kunnen, naarmate zij hooger genomen worden, van het grond- tot het bovenvlak steeds kleiner worden; of zij kunnen, omgekeerd, steeds grooter worden; of ten derde, zij kunnen afwisselend tot aan eene zekere hoogte in grootte afnemen, vervolgens tot aan eene tweede grootere hoogte weder toenemen, en zoo bij afwisseling tot aan het bovenvlak toe.

Nu merken wij vooreerst op, dat, als een ligchaam begrensd is tusschen evenwijdige grond- en bovenvlakken en eenige zijvlakken, en dat b.v. het bovenvlak en alle evenwijdige vlakken tusschen dit en het grondvlak, kleiner zijn dan het grondvlak, dan zal de inhoud des ligchaams *kleiner* wezen dan een prisma, staande op het grondvlak des ligchaams, maar *grooter* dan een ander prisma, staande op het *bovenvlak* en van dezelfde hoogte als het ligchaam.

Men verdeele nu de hoogte der beide ligchamen in een even groot aantal, $n$, gelijke deelen, en brenge door de deelpunten snijdende vlakken, evenwijdig aan de grond- en bovenvlakken, dan zullen deze doorsneden in beide ligchamen, volgens het ondersteelde, twee aan twee gelijk zijn. Zij $h$ de hoogte des ligchaams, en laat de doorsneden, van onder naar boven, voorgesteld worden door $G, G_1, G_2, G_3, \ldots\ldots$ en $G_n = B$.

Dan zullen in het eerste geval dit vlakken zijn, die van G tot B in grootte afnemen. Beschrijven wij in beide ligchamen op elk vlak G een prisma, hebbende $\frac{1}{n}h$ tot hoogte, en wel beginnende van het benedenvlak G naar boven, dan zal elk prisma, volgens het opgemerkte, *grooter* zijn dan het deel des ligchaams, dat tusschen de beide opvolgende snijvlakken gelegen is: diens-

volgens zullen wij zoowel in het eene als in het andere ligchaam hebben:

$$I \text{ of } I' < \frac{1}{n} h(G + G_1 + G_2 + G_3 \ldots\ldots + G_{n-1});$$

of kortheidshalve $I$ of $I' < A$.

Beginnen wij daarentegen de prisma's op de snijdende vlakken te beschrijven, van boven naar onder gaande, dan zal elk prisma kleiner zijn dan het overeenstemmende deel des ligchaams, en dus zullen wij hebben:

$$I \text{ of } I' > \frac{1}{n} h(G_1 + G_2 + G_3 \ldots\ldots + G_n) \text{ of } > A'.$$

Maar nu is $A - A' = \frac{1}{n} h(G - G_n)$

$$= \frac{1}{n} h(G - B).$$

Het verschil dus der grootheden $A$ en $A'$ zal al kleiner en kleiner worden, naarmate $n$ grooter genomen wordt, terwijl de grootheden $I$ en $I'$ steeds tusschen $A$ en $A'$ zullen begrepen zijn.

Hieruit volgt, dat, daar $A$ en $A'$ minder dan eenige gegevene grootheid verschillen *kunnen*, de onveranderlijke $I$ en $I'$ minder dan zulk eene grootheid verschillen *moeten*, dus is noodwendig

$$I = I'.$$

Heeft het tweede geval plaats, dat namelijk de snijdende vlakken tot boven toe steeds grooter worden, dan blijft de redenering volkomen dezelfde, als men het grond- voor boven-, en het boven- voor grondvlak aanneemt, dat is: de ligchamen omkeert. —

Het derde geval is: wanneer de inhouden der doorsneden bij afwisseling over een gedeelte der hoogte toenemen en over een ander deel weder afnemen; dan verdeele men de beide ligchamen door evenwijdige snijdende vlakken in zooveele deelen als er afwisselingen bestaan, zoodat voor elk deel een van de beide eerste gevallen plaats heeft. Deze deelen dan in beide ligchamen stuk voor stuk gelijk zijnde, zoo zullen ook hunne sommen wederzijds gelijk wezen, dat is weder:

$$I = I'.$$

6de Stelling. *De inhoud eener bolvormige Schijf is gelijk aan een zesde der hoogte, vermenigvuldigd, met de som van het*

*grondvlak, het bovenvlak en* viermalen *eene doorsnede der Schijf, genomen op den halven afstand tusschen het grond- en bovenvlak.*

BEWIJS: Zij ABCD (Fig. 15) de voorgestelde bolvormige schijf. Laat om den bol een cilinder NOPQ beschreven worden, waarvan het grond- en bovenvlak evenwijdig is aan de vlakken AB en CD; zij verder, een dubbele kegel NPOQ beschreven zijnde, deszelfs toppunt in het middenpunt des bols en laat eindelijk EFUITGH eene willekeurige doorsnede zijn van de schijf, den cilinder en den kegel, dan is, de straal MG getrokken hebbende:

$$\overline{IG}^2 = \overline{MG}^2 - \overline{MI}^2,$$

maar $MG = IH$ en $MI = IT$,

dus $\overline{IG}^2 = \overline{IH}^2 - \overline{IT}^2.$

Hieruit volgt, dat op dezelfde hoogte, de doorsnede der schijf = de doorsnede des cilinders *min* de doorsnede des kegels is. Dus is ook, tusschen dezelfde evenwijdige vlakken:

De bolv. schijf = de cilinder *min* de dubbele of geknotte kegel.

Zij weder G het grondvlak AB, B het bovenvlak CD, M eene doorsnede der schijf op de halve hoogte, en de hoogte $= h$. Laat $g$, $b$, $m$ dezelfde grootheden voor den kegel zijn, en $g'$ de standvastige doorsnede des cilinders, dan is:

$$G = g' - g, \quad M = g' - m, \quad B = g' - b,$$

$$I = \tfrac{1}{6}h(g' + 4g' + g') - \tfrac{1}{6}h(g + 4m + b)$$

$$= \tfrac{1}{6}h(g' - g + 4(g' - m) + g' - b) = \tfrac{1}{6}h(G + 4M + B).$$

1ste GEVOLG: Voor een bolvormig segment is $B = 0$; dus wordt de inhoud van zulk een segment gevonden door de formule

$$I = \tfrac{1}{6}h(G + 4M).$$

2de GEVOLG. Indien het segment gelijk genomen wordt aan den geheelen bol, dan is ook $G = 0$, en R de straal zijnde, is dan $M = R^2\pi$, $h = 2R$, dus:

$$\text{Inh. Bol} = \tfrac{4}{3}R^3\pi.$$

3de GEVOLG: De inhoud van het ringvormige ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van een cirkelsegment AEB om eene middellijn LM, is gelijk aan den platten ring, voortgebragt door de omwenteling der lijn EF, die door het midden F der koorde gaat en regthoekig op de as ML opgerigt is, vermenigvuldigd met $\tfrac{2}{3}$ der hoogte IK.

„Want het ringvormige ligchaam is het verschil tusschen de schijf ABCD en den geknotten kegel ABCD. Schijf en kegel hebben dezelfde hoogte $h$, dezelfde grond- en bovenvlakken G en B, maar de schijf heeft tot middenvlak den cirkel EH $=$ M en de geknotte kegel den cirkel FG $= m$, dus:

$$\text{Schijf ABCD} = \tfrac{1}{6}h(G + 4M + B)$$

$$\text{Gekn. Kegel ABCD} = \tfrac{1}{6}h(G + 4m + B)$$

en $$\text{Ringv. Ligchaam AEB, CHD} = \tfrac{2}{3}h(M - m).$$

7de Stelling. *Wanneer eene Ellips* GHVW *om hare groote of kleine as wentelt en alzoo eene omwentelings-ellipsoïde voortbrengt, en wanneer door twee evenwijdige vlakken, beide regthoekig aan de omwentelings-as, eene schijf uit dit ligchaam wordt gesneden, dan zal de inhoud dier schijf mede door de formule*

$$I = \tfrac{1}{6}h(G + 4M + B)$$

*gevonden worden.*

Bewijs: (Fig. 17) Men zoude dit kunnen bewijzen, door op de wentelings-as, om of in de ellipsoïde, naar gelang dat de groote of kleine as der Ellips wentelings-as is, eenen bol te beschrijven, en de snijdende vlakken DC en AB, des noodig, tot den bol te verlengen. Deze vlakken zouden van den bol eene schijf afsnijden. Brengt men dan tusschen de grond- en bovenvlakken ergens een evenwijdig snijdend vlak, dan zal men steeds, indien $a$ en $b$ de halve assen der Ellips zijn, de evenredigheid hebben:

$$\text{Doorsn. Bol} : \text{Doorsn. Ellipsoïde} = a^2 : b^2$$

of, als de wenteling om de kleine as geschiedt:

$$\text{Doorsn. Bol} : \text{Doorsn. Ellipsoïde} = b^2 : a^2.$$

Dus zal ook zijn:

$$\text{Bolv. Schijf} : \text{Ellipsoïdevorm. Schijf} = a^2 : b^2 \text{ of } = b^2 : a^2.“$$

Maar G′ en B′ de grond- en bovenvlakken van de bolvormige schijf zijnde en I′ haar inhoud, zoo is:

$$I' = \tfrac{1}{6}h(G' + 4M' + B'),$$

dus $$I = \tfrac{1}{6}h\left(\frac{b^2}{a^2}G' + 4\frac{b^2}{a^2}M' + \frac{b^2}{a^2}B\right);$$

dat is: $$I = \tfrac{1}{6}h(G + 4M + B).$$

En hetzelfde heeft plaats als de wenteling om de kleine as geschied is.

Maar men kan de stelling ook zonder hulp van eenen bol, regtstreeks bewijzen. Laat daartoe om de Ellipsoïde een Cilinder NPQO beschreven zijn, waarvan de beschrijvende lijnen evenwijdig

aan de as VW loopen. Laat aan de toppunten der Ellipsoïde V en W rakende vlakken $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ gebragt worden, welke den cilinder doorsnijden, en daarvan als grond- en bovenvlakken kunnen aangemerkt worden, en laat ten laatste een dubbele kegel beschreven worden, hebbende het middelpunt M der Ellipsoïde tot toppunt, en de vlakken $\alpha\beta$ en $\gamma\delta$ tot grond- en bovenvlakken. Zij weder VW $= 2a$ de groote en GH $= 2b$ de kleine as der Ellipsoïde, en laat op eenigen afstand MX $= x$ eene doorsnede van den kegel, den cilinder en van de Ellipsoïde genomen worden, dan zal men hebben:

$$\text{Doorsnede Kegel} = \pi \times \frac{b^2}{a^2}.x^2 = K,$$

$$\text{» Cilinder} = \pi \times b^2 = C,$$

$$\text{» Ellipsoïde} = \pi \times \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = E.$$

Derhalve is: $E = C - K.$

Dat heet: op elke hoogte zal de doorsnede der Ellipsoïde gelijk zijn aan het verschil der doorsneden van den Cilinder en van den Kegel. Dus is ook:

Ellipsoïde vorm. Schijf = Cilind. $a'b'c'd'$ — gekn. Kegel $abcd$.

Zij het boven-, beneden- en middenvlak des gekn. Kegels

$$= B', G', M',$$

de doorsnede van den Cilinder, als boven

$$= C,$$

dan is voor de Ellipsoïdevormige schijf

$$G = C - G', \quad B = C - B', \quad M = C - M'$$

en

$$I = \tfrac{1}{6}h(G + 4C + C) - \tfrac{1}{6}h(G' + 4M' + B')$$
$$= \tfrac{1}{6}h(C - G' + 4(C - M') + C - B')$$
$$= \tfrac{1}{6}h(G + 4M + B).$$

Dezelfde redenering geldt ook als de wenteling om de kleine as geschiedt, waarbij dan $a$ in $b$, en omgekeerd $b$ in $a$ overgaat, maar overigens alles onveranderd blijft.

8ste Stelling. *Indien men eene Hyperbool om hare groote of kleine as laat wentelen, en door twee evenwijdige vlakken regthoekig aan de as van wenteling eene schijf uit het ligchaam snijdt, dan zal mede de inhoud van deze schijf gevonden worden door de formule:*

$$I = \tfrac{1}{6}h(G + 4M + B).$$

Bewijs: Laat in Fig. 17 IM en LK de beide misloopers der Hyperbool RVS, TWU voorstellen, en nemen wij vooreerst aan, dat de wenteling om de groote as VW geschiedt, waarbij de misloopers eenen dubbelen kegel beschrijven. Beschrijven wij ook nog eenen cilinder, waarvan de beschrijvende lijnen evenwijdig aan de omwentelings-as loopen, en waarvan het grondvlak een cirkel is, met de kleine as der Hyperbool tot middellijn. Zij weder $a$ en $b$ de halve assen en MZ $= x$ een afstand naar welgevallen, dan is:

Doorsnede Kegel $= \pi \times \frac{b^2}{a^2} . x^2 = K$,

» Cilinder $= \pi \times b^2 = C$,

» Hyperboloïde $= \pi \times \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) = H$,

bijgevolg: $H = K - C$.

Het overige van het bewijs is weder geheel als voor de Ellipsoïde.

Indien de wenteling om de kleine as geschiedt, dan beschouwe men den kegel ILM met de as GH en den cilinder $\alpha\beta\gamma\delta$, die tot doorsnede eenen cirkel heeft met de middellijn $2a$, en nu is, op den afstand $y$ van het punt M:

Doorsnede Kegel $= \pi \times \frac{a^2}{b^2} x^2 = K'$,

» Cilinder $= \pi \times a^2 = C'$,

» Hyperboloïde $= \pi \times \frac{a^2}{b^2} (b^2 + x^2) = H'$.

Dus $H' = K' + C'$ enz.

Aanmerking. Indien in Fig. 17 de wenteling om de groote as van de Ellips en van de Hyperbool geschiedt, dan kan men het ligchaam, voortgebragt door de Ellips en dat door de Hyperbool, als tot één ligchaam behoorende, beschouwen, mits de ruimte door de Ellips voortgebragt als *negatief* in rekening brengende, want wij hebben:

Doorsnede Ellipsoïde $E = C - K$,

» Hyperb. $H = K - C$.

Neemt men dan eene doorsnede in de Hyperboloïde RVS als bovenvlak, eene andere in de Hyperboloïde TWU als grondvlak, en tusschen deze beiden op den halven afstand eene doorsnede als middenvlak, 't zij door de Ellipsoïde, als wanneer het middenvlak *negatief* zal zijn, 't zij door eene der Hyperboloïden, wan-

neer het *positief* is, dan zal de uitdrukking $I = \frac{1}{6}h(G + 4M + B)$ de ruimte doen vinden, die gelijk is aan de som der ruimten van de bovenste en onderste Hyperboloïde afgesneden, *min* den inhoud der Ellipsoïde.

9de Stelling. *Indien de doorsnede* GH *der Ellipsoïde in Fig.* 17 *zelve eene Ellips is, zoodat de Ellipsoïde niet meer van omwenteling is, maar drie assen heeft, dan zal nog dezelfde uitdrukking den inhoud eener schijf tusschen twee evenwijdige vlakken doen vinden.* Want ook nu kan men de schijf beschouwen als het verschil van eenen elliptischen cilinder met eenen elliptischen geknotten kegel.

10de Stelling. *Hetzelfde geldt ook voor de elliptische Hyperboloïde, als voor de Ellipsoïde met drie assen.* Bewijs als voren.

11de Stelling. *Hetzelfde geldt ook nog wanneer de as* MV *niet regthoekig staat op het vlak* GH, *maar daarmede eenen hoek naar welgevallen maakt. In dit geval moeten* VW *en* GH *twee mede-diameters zijn.*

12de Stelling. *De Inhoud eener Schijf, door twee evenwijdige vlakken gesneden uit eene Paraboloïde, wordt ook gevonden door de formule*

$$I = \frac{1}{6}h(G + 4M + B).$$

Bewijs: Zij DAE de Paraboloïde, en DE en BC de beide evenwijdige doorsneden, dat Ellipsen of Cirkels kunnen zijn, dan weet men dat deze doorsneden evenredig zijn aan de afstanden AQ en AR, tot het toppunt A der as. Onderstelt men nu een driehoekig prisma NMOPFG, zoodanig, dat de zijde MNOP = Doorsn. DE, in het verlengde vlak DE ligt, en dat de afstand der ribbe FG tot dit vlak = AR is, dan heeft men op iedere andere hoogte AQ:

Doorsnede BC : Doorsnede DE = AQ : AR
en » HL : » MO = AQ : AR.
bijgevolg: Doorsnede BC = Doorsnede HL.
Dus is, Schijf DCBE = Liggend Prisma MNOPKHIL
en dus ook:

$$\text{Inh. Schijf} = \frac{1}{6}h(B + 4M + G) = \frac{1}{2}h(B + G),$$

omdat $M = \dfrac{B + G}{2}$ is.

Aanmerking. Men ziet in het algemeen, dat, wanneer de doorsnede van eenig ligchaam voorgesteld kan worden door eene uit-

drukking van den vorm

$$D = a + bx + cx^2,$$

waarin $x$ de hoogte der doorsnede voorstelt, men dan dit ligchaam beschouwen kan als de som van eenen cilinder met standvastige doorsnede $= a$,

van eene wig of driehoekig prisma, als in Fig. 18, met eene doorsnede op de hoogte $x$ $= bx$,

en van eenen kegel of piramide, met doorsnede

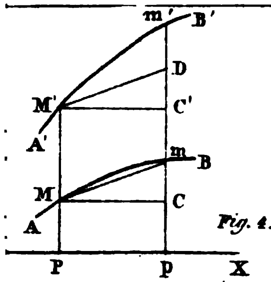
$$= cx^2,$$

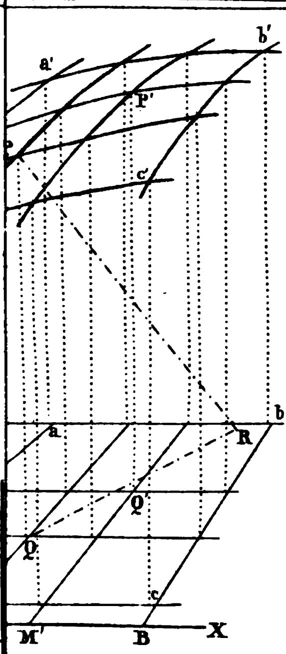
en dat voor eene schijf uit dit ligchaam de formule $I = \frac{1}{6}h(G + 4M + B)$ doorgaat, waarbij men niet uit het oog moet verliezen, dat voor die gedeelten des ligchaams, waarvoor D *negatief* is, ook de overeenkomstige ligchamelijke ruimte *negatief* zal zijn.

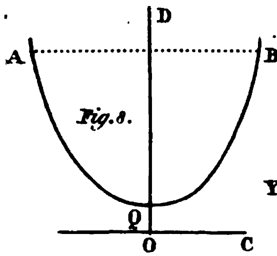
In de verhandeling van den Heer LOBATTO over hetzelfde onderwerp is aangetoond, dat dezelfde uitdrukking voor inhoudsvinding ook nog doorgaat als de doorsnede van eenig ligchaam, voorgesteld kan worden door de formule $D = a + bx + cx^2 + dx^3$.

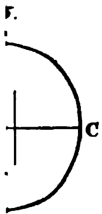
Het schijnt echter niet, dat dit op eene even eenvoudige meetkundige wijze aangetoond kan worden, als voor het geval dat er slechts drie termen in de uitdrukking voorkomen. — De zwarigheid bestaat daarin om meetkunstig te doen zien dat $\int x^3 \partial x = \frac{1}{4}x^4$ is. — Van toepassingen die van de bewezene formule gemaakt kunnen worden, zullen wij alleen wijzen op de inhoudsvinding van Fusten, wanneer men de duigen als Ellipsboogen aanneemt. In dit geval is het vat gelijk aan eene schijf eener Ellipsoïde. Is het niet rond, maar met ellipsvormige bodems, dan zal het eene schijf zijn eener Ellipsoïde met drie assen. Wil men van zulk een fust het *wan*-gedeelte berekenen, wanneer het horizontaal liggende gevuld is, zoodat de beide bodems bedekt zijn, dan is het *wan*-gedeelte een segment eener Ellipsoïde, waarvoor dus ook de formule doorgaat. Staat het fust overeind, zoodat de bodems horizontaal komen, dan is het *wan*-, zoowel als het gevulde gedeelte, weder eene schijf uit eene Ellipsoïde. Bij inhoudsmetingen van schepen of gedeelten er van, zal de formule ook met vrucht als eene goede benadering kunnen toegepast worden. In het algemeen is het, in de toegepaste meetkunde, eene belangrijke uitdrukking voor de inhoudsvinding van ligchamen.

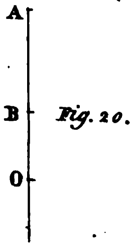
Plaat I.





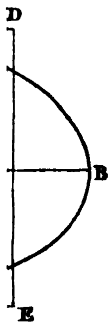




Fig. 19.

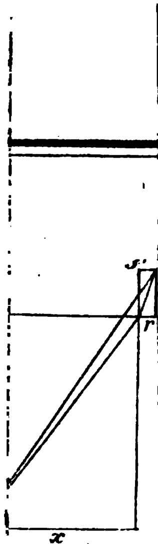
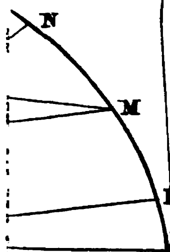
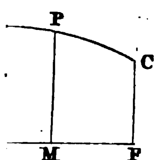
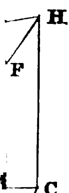



Fig. 7.




P
C
M
F


H
F
C

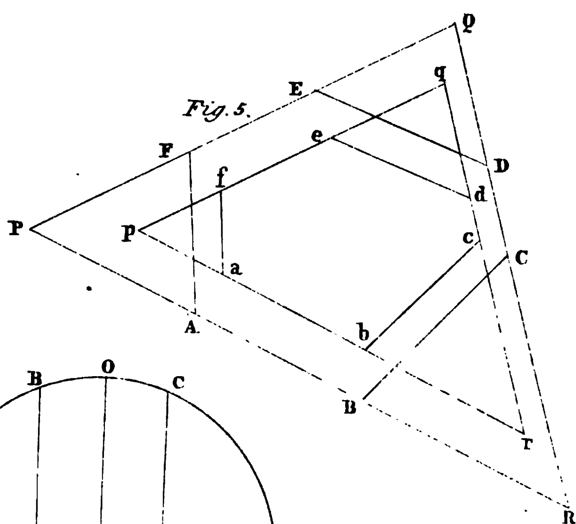


Fig. 5.
Q
q
E
e
F
f
D
d
P
p
a
c
C
A
b
B
r
R

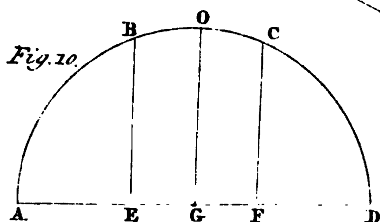


Fig. 20.
B
O
C
A
E
G
F
D

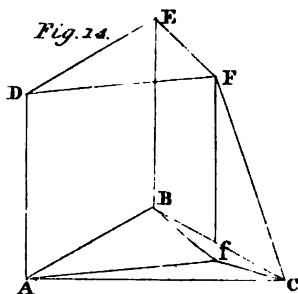


Fig. 24.
E
D
F
B
f
A
C

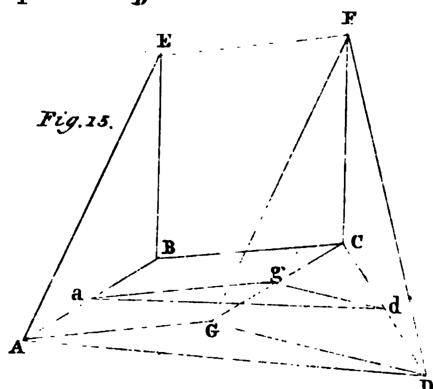


Fig. 25.
E
F
B
C
g
a
d
G
A
D

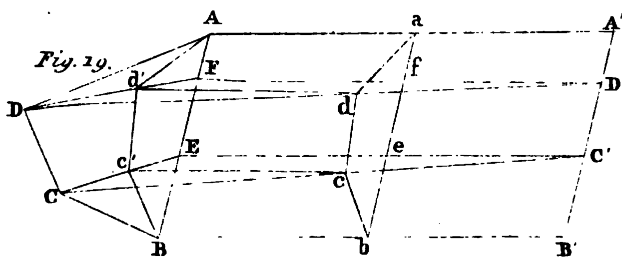
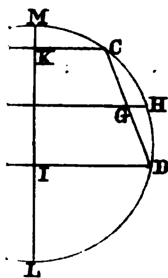
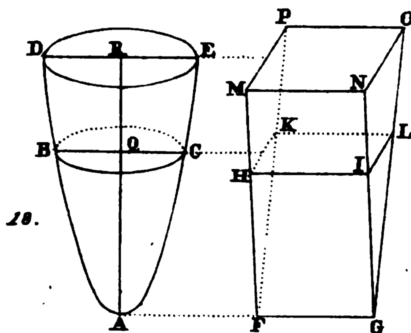


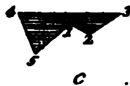
Fig. 29.
A
a
A'
F
f
d'
D'
D
d
E
e
c'
C'
C
c
B
b
B'

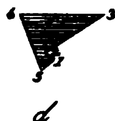
C

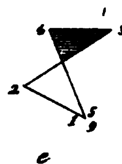
Plaat V.

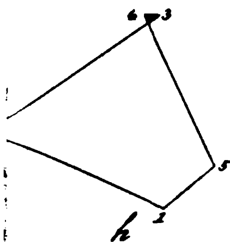


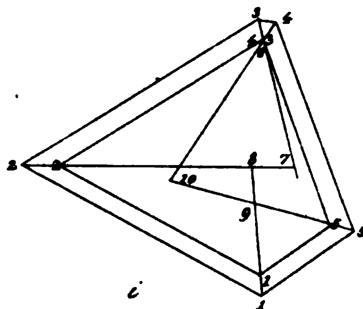



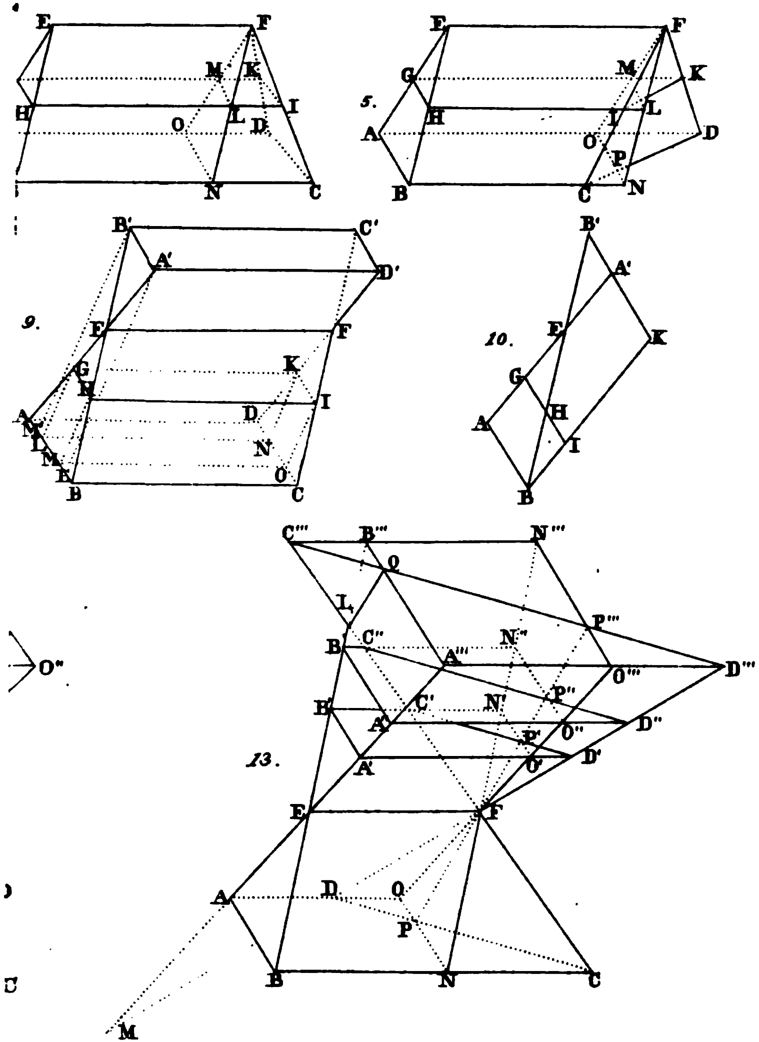



Plaat IV.


E
F
M
K
H
L
I
O
D
N
C
5.
E
F
G
M
K
H
L
A
O
D
P
B
C
N
B'
C'
A'
D'
9.
E
F
G
K
H
I
D
N
O
B
C
B'
A'
10.
E
K
G
A
H
I
B
C'''
B'''
N'''
Q
L
P'''
B''
C''
N''
A'''
P''
O'''
D'''
B'
C'
N'
A'
P'
O''
D''
13.
A'
O'
D'
E
F
A
D
O
P
B
N
C
M

# NIEUWE
## WIS- EN NATUURKUNDIGE
# VERHANDELINGEN

VAN HET

# GENOOTSCHAP,

## TE AMSTERDAM,

TER SPREUKE VOERENDE:

*EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.*

---

TWEEDE DEEL.

TWEEDE STUK.

---

## OPLOSSINGEN VAN PRIJSVRAGEN.

(Gedrukt voor Rekening van het Genootschap.)

*Te AMSTERDAM*, bij
WEIJTINGH EN VAN DER HAART,
BOEKVERKOOPERS,
Warmoesstraat, bij de Wijde Kerksteeg, I j N°. 25.
1854.

*Geene Exemplaren van de Werken dezes Genootschaps worden voor echt erkend, dan die, welke aldus geteekend zijn:*

*Tweede Secretaris.*

# INHOUD.

# OPLOSSINGEN

DER

ALS PRIJSVRAGEN VOORGESTELDE

# VRAAGSTUKKEN,

VOOR WELKER BEANTWOORDING, TER ALGEMEENE VERGADERING VAN DEN JARE 1848, EEN PRIJS IS TOEGEWEZEN AAN HET LID DES GENOOTSCHAPS

**G. F. W. BAEHR.**

## VRAAGSTUK A.

*Men vraagt den stand der drie voorname of hoofd-assen van omwenteling te bepalen, die in eenen scheven kegel met cirkelvormige bazis, door het swaartepunt van dat ligchaam kunnen getrokken worden.*

### OPLOSSING.

Drie onderling loodregte assen, getrokken door eenig punt van een ligchaam, worden hoofd-assen van omwenteling genoemd, indien voor dezelve de drie integralen $\int xy\partial m$, $\int xz\partial m$, $\int yz\partial m$, waarin $\partial m$ de differentiaal der massa voorstelt, verdwijnen, wanneer zij over het geheele ligchaam worden uitgebreid.

Bij Poisson, *Traité de Mécanique*, Tom. II, kan men het bewijs vinden voor het bestaan van ten minste *één* stelsel van drie zulke assen door elk willekeurig punt van een ligchaam, welke ook deszelfs gedaante zij; ook worden aldaar de vergelijkingen opgegeven waardoor de stand van die assen in het algemeen berekend kan worden, maar in sommige gevallen zal men de oplossing van dit Vraagstuk veel kunnen vereenvoudigen, door eene

geschikte keuze van het regthoekig coördinatenstelsel, waardoor men de ligging der hoofd-assen bepaalt.

Dit zal bij den scheven kegel met cirkelronde bazis plaats hebben, als men den oorsprong stelt in het zwaartepunt, waarvoor hier de hoofd-assen gezocht moeten worden; het vlak dat door de as loodregt op het grondvlak staat voor $xz$vlak en de loodlijn uit het zwaartepunt op het grondvlak getrokken voor as der $z$ aanneemt; de rigtingen der $x$ en $y$ assen zijn dan mede bepaald en daar nu aan beide zijden van het $xz$vlak alles symetriek is, weet men reeds vooraf, dat de integralen $\int xy\partial m$, $\int yz\partial m$ uitgebreid over het geheele ligchaam, verdwijnen; want klaarblijkelijk heeft men voor elk punt aan de eene zijde van het $xz$vlak, waarvoor $xy\partial m$ en $yz\partial m$ zekere waarden hebben, een overeenkomstig punt aan de andere zijde, waarvoor die waarden gelijk doch tegengesteld van teeken zijn.

De vraag is nu of men de $y$ as onveranderd latende, de assen der $x$ en der $z$ zoodanig in het $xz$vlak kan doen draaijen, dat voor eenigen stand derzelve ook $\int xz\partial m$ gelijk nul zij.

Stel hiertoe dat de nieuwe as der $x$ (of die der $x'$) eenen hoek $\phi$ moet maken met de oorspronkelijke as der $x$, dan worden de coördinaten $x$ en $z$ van de verschillende punten in het ligchaam vervangen door nieuwe $x'$ en $z'$, zijnde volgens bekende formulen

$$x' = x\, Cos.\phi - z\, Sin.\phi\,,\; z' = x\, Sin.\phi + z\, Cos.\phi;$$

brengt men deze waarden over in $\int x'z'\partial m = 0$, dan vindt men

$$Sin.2\phi.\int (x^2 - z^2)\,\partial m + 2Cos.2\phi \int xz\partial m = 0\,, \quad . \; . \; (A)$$

door welke vergelijking $\phi$ bepaald zal zijn.

Wij zullen dus eerst voor de oorspronkelijke assen de integralen $\int x^2\partial m$, $\int z^2\partial m$ en $\int xz\partial m$ zoeken, en hiertoe verplaatsen wij den oorsprong uit het zwaartepunt in den top, terwijl de assen evenwijdig aan hare eerste rigtingen blijven, zoodat nu de kegel (zie Fig. 1) bepaald is door zijne hoogte OA $= a$, den afstand AB $= b$, en den straal van het grondvlak BD $=$ R; en wij vervangen de regthoekige coördinaten (voor deze assen aangeduid door $x_1$, $y_1$ en $z_1$) door polaire, stellende namelijk

$$x_1 = r\, Cos.\theta. \qquad y_1 = r\, Sin.\theta\, Cos.\psi. \qquad z_1 = r\, Sin.\theta\, Sin.\psi,$$

waarin dus $\theta$ de hoek is die de polaire ordinaat (OM $= r$) maakt met de as der $x$ en $\psi$ de hoek die het vlak gaande door $r$ en de as der $x$ maakt met het $xy$vlak. Alle punten van den massieven

kegel kunnen dan omvat worden door in de vergelijking

$$r = \frac{z_1}{Sin.\ \theta\ Sin.\ \psi}$$

$z_1$ van $z_1 = 0$ tot $z_1 = a$ te laten aangroeijen en daarbij aan $\theta$ en $\psi$, tusschen zekere grenzen, alle mogelijke waarden te geven.

Deze grenzen zijn voor $\psi$ de hoeken, van de vlakken gaande door de as der $x$ en den kegel rakende, met het $xy$vlak, bepaald door

$$Cot.\ \psi_1 = Cot.\ y_1OC = Tang.\ COA = \frac{CA}{OA} = \frac{R}{a},$$

$$Cot.\ \psi_2 = Cot.\ y_1OC' = -Tang.\ AOC' = -\frac{AC'}{OA} = -\frac{R}{a}.$$

Heeft men verder voor $\psi$ eenige waarde tusschen deze grenzen genomen, dan zijn voor die waarde de grenzen van $\theta$ bepaald door

$$Cot.\theta_1 = Cot.x_1OD = Tang.\ DOE = \frac{DE}{EO} = \frac{Sin.\psi}{a}\left\{b + \sqrt{(R^2 - a^2 Cot.^2\psi)}\right\}$$

$$Cot.\theta_2 = Cot.x_1OD' = Tang.\ D'OE = \frac{D'E}{EO} = \frac{Sin\psi}{a}\left\{b - \sqrt{(R^2 - a^2 Cot.^2\psi)}\right\},$$

zijnde het in de figuur duidelijk dat men heeft:

$$AE = AO\ Tang.\ AOE = AO\ Cot.\ y_1OE = a\ Cot.\ \psi = BF,$$

$$OE = \frac{AO}{Cos.\ AOE} = \frac{a}{Sin.\ y_1OE} = \frac{a}{Sin.\ \psi},$$

$$ED = EF + FD = AB + FD = AB + \sqrt{(BD^2 - BF^2)} = b + \sqrt{(R^2 - a^2 Cot.^2\psi)},$$

$$ED' = EF - FD' = b - \sqrt{(R^2 - a^2\ Cot.^2\ \psi)}.$$

Stellen wij verder kortheidshalve de massa der cubieke eenheid van het gelijkslachtig ligchaam gelijk 1, dan is $\delta m = \delta x.\delta y.\delta z$, welke uitdrukking, zoo als bekend is, door het gebruik van polaire ordinaten, overgaat in $r^2\ Sin.\ \theta\ \delta r.\ \delta\theta.\ \delta\psi$; en moet men nu eenige integraal b. v. $\int F\ (x, y, z)\ \delta x.\ \delta y.\ \delta z$ over het geheele ligchaam uitbreiden, dan substitueert men in dezelve voor de regthoekige coördinaten hunne waarden uitgedrukt in de polaire; integreert eerst ten opzigte van $r$, van $r = 0$ tot de waarde van $r$, die met $z_1 = a$ overeenkomt; daarna ten opzigte van $\theta$, van $\theta = \theta_1$ tot $\theta = \theta_2$; en eindelijk ten opzigte van $\psi$, van $\psi = \psi_1$ tot $\psi = \psi_2$.

Zoeken wij op deze wijze al de integralen

$$\int x_1^2\delta m,\qquad \int y_1^2\delta m,\qquad \int z_1^2\delta m,$$

$$\int x_1y_1\delta m,\qquad \int x_1z_1\delta m,\qquad \int y_1z_1\delta m,$$

om te doen zien, dat werkelijk de vierde en zesde verdwijnen, dan hebben wij vooreerst, de substitutiën verrigtende:

$$x_1^2 \partial m = r^4\ Cos.^2\ \theta\ Sin.\ \theta\ \partial r.\ \partial \theta.\ \partial \psi,$$
$$y_1^2 \partial m = r^4\ Sin.^3\ \theta\ Cos.^2\ \psi\ \partial r.\ \partial \theta.\ \partial \psi,$$
$$z_1^2 \partial m = r^4\ Sin.^3\ \theta\ Sin.^2\ \psi\ \partial r.\ \partial \theta.\ \partial \psi,$$
$$x_1 y_1 \partial m = r^4\ Cos.\ \theta\ Sin.^2\ \theta\ Cos.\ \psi\ \partial r.\ \partial \theta.\ \partial \psi,$$
$$x_1 z_1 \partial m = r^4\ Cos.\ \theta\ Sin.^2\ \theta\ Sin.\ \psi\ \partial r.\ \partial \theta.\ \partial \psi,$$
$$y_1 z_1 \partial m = r^4\ Sin.^3\ \theta\ Cos.\ \psi\ Sin.\ \psi\ \partial r.\ \partial \theta.\ \partial \psi.$$

Eene eerste integratie ten opzigte van $r$, van $r = 0$ tot $r = \frac{a}{Sin.\ \theta\ Sin.\ \psi}$ geeft:

$$\int x_1^2 \partial m = \frac{a^5}{5} \int\int \frac{Cos.^2\ \theta}{Sin.^2\ \theta} . \frac{\partial \theta}{Sin.^2\ \theta} . \frac{\partial \psi}{Sin.^5\ \psi} = -\frac{a^5}{5} \int\int Cot.^2\ \theta\ \partial . Cot.\ \theta\ \frac{\partial \psi}{Sin.^5\ \psi},$$

$$\int y_1^2 \partial m = \frac{a^5}{5} \int\int \frac{\partial \theta}{Sin.^2\ \theta} . \frac{Cos.^2\ \psi \partial \psi}{Sin.^5\ \psi} = -\frac{a^5}{5} \int\int \partial .\ Cot.\ \theta . \frac{Cos.^2\ \psi \partial \psi}{Sin.^5\ \psi},$$

$$\int z_1^2 \partial m = \frac{a^5}{5} \int\int \frac{\partial \theta}{Sin.^2\ \theta} . \frac{\partial \psi}{Sin.^3\ \psi} = -\frac{a^5}{5} \int\int \partial .\ Cot.\ \theta . \frac{\partial \psi}{Sin.^3\ \psi},$$

$$\int x_1 y_1 \partial m = \frac{a^5}{5} \int\int \frac{Cos.\ \theta}{Sin.\ \theta} . \frac{\partial \theta}{Sin.^2\ \theta} . \frac{Cos.\ \psi \partial \psi}{Sin.^5\ \psi} = -\frac{a^5}{5} \int\int Cot.\ \theta\ \partial .\ Cot.\ \theta . \frac{Cos.\ \psi \partial \psi}{Sin.^5\ \psi},$$

$$\int x_1 z_1 \partial m = \frac{a^5}{5} \int\int \frac{Cos.\ \theta}{Sin.\ \theta} . \frac{\partial \theta}{Sin.^2\ \theta} . \frac{\partial \psi}{Sin.^4 . \psi} = -\frac{a^5}{5} \int\int Cot.\ \theta .\ \partial . Cot.\ \theta . \frac{\partial \psi}{Sin.\ ^4\psi},$$

$$\int y_1 z_1 \partial m = \frac{a^5}{5} \int\int \frac{\partial \theta}{Sin.^2\ \theta} . \frac{Cos.\ \psi \partial \psi}{Sin.^4\ \psi} = -\frac{a^5}{5} \int\int \partial . Cot.\ \theta \frac{Cos.\ \psi \partial \psi}{Sin.^4\ \psi}.$$

Eene tweede integratie van $Cot.\ \theta = Cot.\ \theta_1$ tot $Cot.\ \theta = Cot.\ \theta_2$ geeft:

$$\int x_1^2 \partial m = \tfrac{1}{3}\,\frac{a^5}{5}\int \frac{Sin.^3\,\psi}{a^3}\left\{\left(b+\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\right)^3-\left(b-\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\right)^3\right\}\frac{\partial\psi}{Sin.^5\,\psi}$$

$$= -\tfrac{2}{15}a^3\int\left\{3b^2\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}+\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)^3}\right\}\partial.\ Cot.\ \psi,$$

$$\int y_1^2 \partial m = \frac{a^5}{5}\int \frac{Sin.\,\psi}{a}\left\{\left(b+\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\right)-\left(b-\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\right)\right\}\frac{Cos.^2\,\psi\,\partial\psi}{Sin.^5\,\psi}$$

$$= -\tfrac{2}{5}\,a^4\int Cot.^2\,\psi\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\ \partial.\ Cot.\ \psi,$$

$$\int z_1^2 \partial m = \frac{a^5}{5}\int \frac{Sin.\,\psi}{a}\left\{\left(b+\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\right)-\left(b-\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\right)\right\}\frac{\partial\psi}{Sin.^3\,\psi}$$

$$= -\tfrac{2}{5}\,a^4\int\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\ \partial.\ Cot.\ \psi,$$

$$\int x_1 y_1 \partial m = \tfrac{1}{2}\,\frac{a^5}{5}\int \frac{Sin.^2\psi}{a^2}\left\{\left(b+\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\right)^2-\left(b-\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\right)^2\right\}\frac{Cos.\,\psi\,\partial\psi}{Sin.^5\,\psi}$$

$$= -\tfrac{2}{5}\,a^3 b\int Cot.\,\psi\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\ \partial.\ Cot.\ \psi,$$

$$\int x_1 z_1 \partial m = \tfrac{1}{2}\,\frac{a^5}{5}\int \frac{Sin.^2\,\psi}{a^2}\left\{\left(b+\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\right)^2-\left(b-\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\right)^2\right\}\frac{\partial\psi}{Sin.^4\,\psi}$$

$$= -\tfrac{2}{5}\,a^3 b\int\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\ \partial.\ Cot.\ \psi,$$

$$\int y_1 z_1 \partial m = \frac{a^5}{5}\int \frac{Sin.\,\psi}{a}\left\{\left(b+\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\right)-\left(b-\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\right)\right\}\frac{Cos.\,\psi\,\partial\psi}{Sin.^4\psi}$$

$$= -\tfrac{2}{5}\,a^4\int Cot.\,\psi\sqrt{(R^2-a^2\,Cot.^2\,\psi)}\ \partial.\ Cot.\,\psi.$$

Als men vervolgens $\frac{a}{R}$ *Cot.* $\psi = u$ stelt, dan veranderen deze formulen in:

$$\int x_1^2 \delta m = -\tfrac{2}{5}\, ab^2R^2 \int \sqrt{(1-u^2)}\,\delta u - \tfrac{2}{15}\, aR^4 \int \sqrt{(1-u^2)^3}\,\delta u;$$
$$\int y_1^2 \delta m = -\tfrac{2}{5}\, aR^4 \int u^2\sqrt{(1-u^2)}\,\delta u,$$
$$\int z_1^2 \delta m = -\tfrac{2}{5}\, a^3R^2 \int \sqrt{(1-u^2)}\,\delta u;$$
$$\int x_1y_1 \delta m = -\tfrac{2}{5}\, abR^3 \int u\sqrt{(1-u^2)}\,\delta u,$$
$$\int x_1z_1 \delta m = -\tfrac{2}{5}\, a^2bR^2 \int \sqrt{(1-u^2)}\,\delta u;$$
$$\int y_1z_1 \delta m = -\tfrac{2}{5}\, a^2R^3 \int u\sqrt{(1-u^2)}\,\delta u,$$

waarin de integralen genomen moeten worden van $u = +1$ tot $u = -1$, overeenstemmende met

$$Cot.\,\psi = Cot.\,\psi_1 = \frac{R}{a} \text{ en } Cot.\,\psi = Cot.\,\psi_2 = -\frac{R}{a}.$$

Nu is:

$$\int \sqrt{(1-u^2)}\,\delta u = \tfrac{1}{2}\, u\sqrt{(1-u^2)} + \tfrac{1}{2}\, Boog\,(Sin. = u),$$
$$\int u\sqrt{(1-u^2)}\,\delta u = -\tfrac{1}{3}\sqrt{(1-u^2)^3},$$
$$\int u^2\sqrt{(1-u^2)}\,\delta u = \tfrac{1}{4}\,(u^3 - \tfrac{1}{2}u)\sqrt{(1-u^2)} + \tfrac{1}{8}\, Boog\,(Sin. = u),$$
$$\int \sqrt{(1-u^2)^3}\,\delta u = \tfrac{1}{4}\, u\sqrt{(1-u^2)^3} + \tfrac{3}{8}\, u\sqrt{(1-u^2)} + \tfrac{3}{8}\, Boog\,(Sin. = u),$$

en dus $\int_{+1}^{-1} \sqrt{(1-u^2)}\,\delta u = \tfrac{1}{2}\,\{Boog\,(Sin. = -1) - Boog\,(Sin. = 1)\} = -\tfrac{1}{2}\,\pi,$

$$\int_{+1}^{-1} u\sqrt{(1-u^2)}\,\delta u = 0, \int_{+1}^{-1} u^2\sqrt{(1-u^2)}\,\delta u = -\tfrac{1}{8}\,\pi, \int_{+1}^{-1} \sqrt{(1-u^2)^3}\,\delta u = -\tfrac{3}{8}\,\pi,$$

waardoor men verkrijgt, als men nog de massa (of hier ook den inhoud) van den kegel $\frac{1}{3}\pi R^2 a = M$ stelt,

$$\int x_1^2 \partial m = \frac{1}{20}\pi a R^2 (4b^2 + R^2) = \frac{3}{20} M (4b^2 + R^2),$$
$$\int y_1^2 \partial m = \frac{1}{20}\pi a R^4 = \frac{3}{20} MR^2,$$
$$\int z_1^2 \partial m = \frac{1}{5}\pi a^3 R^2 = \frac{3}{5} Ma^2,$$
$$\int x_1 y_1 \partial m = 0,$$
$$\int x_1 z_1 \partial m = \frac{1}{4}\pi a^2 b R^2 = \frac{3}{4} Mab,$$
$$\int y_1 z_1 \partial m = 0.$$

Men kan uit deze integralen gemakkelijk die vinden, welke betrekking hebben op het coördinaten-stelsel, waarvan het zwaartepunt de oorsprong is; want stelt men de coördinaten van het zwaartepunt dat in het $x_1 z_1$ vlak ligt, $0z' = p$ en $0z'' = n$, en neemt men in aanmerking dat

$$\int \partial m = M,\ \int x_1 \partial m = pM,\ \int z_1 \partial m = nM$$

is, dan heeft men:

$$\int x^2 \partial m = \int (x_1 - p)^2 \partial m = \int x_1^2 \partial m - 2p \int x_1 \partial m + p^2 \int \partial m = \int x_1^2 \partial m - p^2 M,$$
$$\int y^2 \partial m = \int y_1^2 \partial m,$$
$$\int z^2 \partial m = \int (z_1 - n)^2 \partial m = \int z_1^2 \partial m - 2n \int z_1 \partial m + n^2 \int \partial m = \int z_1^2 \partial m - n^2 M,$$
$$\int xy \partial m = \int x_1 y_1 \partial m = 0,$$
$$\int xz \partial m = \int (x_1 - p)(z_1 - n) \partial m = \int x_1 z_1 \partial m - n \int x_1 \partial m - p \int z_1 \partial m + pn \int \partial m$$
$$= \int x_1 z_1 \partial m - pnM,$$
$$\int yz \partial m = \int y_1 z_1 \partial m = 0.$$

Daar nu het zwaartepunt van den kegel gelegen is op $\frac{3}{4}$ van de as van den top afgerekend, zoo zal ook $p = \frac{3}{4} b$, $n = \frac{3}{4} a$ zijn, en hierdoor verkrijgt men eindelijk:

$$\int x^2 \delta m = \tfrac{3}{20} \mathrm{M} (4b^2 + \mathrm{R}^2) - \tfrac{9}{16} b^2 \mathrm{M} = \tfrac{3}{80} \mathrm{M} (4\mathrm{R}^2 + b^2),$$

$$\int y^2 \delta m = \tfrac{3}{20} \mathrm{MR}^2,$$

$$\int z^2 \delta m = \tfrac{3}{5} \mathrm{M} a^2 - \tfrac{9}{16} \mathrm{M} a^2 = \tfrac{3}{80} a^2 \mathrm{M},$$

$$\int xz \delta m = \tfrac{3}{5} \mathrm{M} ab - \tfrac{9}{16} \mathrm{M} ab = \tfrac{3}{80} ab\mathrm{M}.$$

Verder heeft men uit de vergelijking (A)

$$Tang.\ 2\phi = -\frac{2 \int xz \delta m}{\int (x^2 - z^2) \delta m}.$$

dus $$Tang.\ 2\phi = -\frac{2ab}{4\mathrm{R}^2 + b^2 - a^2}, \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{B})$$

waardoor de rigtingen der hoofd-assen geheel bepaald zijn.

De uitdrukking voor *Tang.* $2\phi$ kan alleen den onbepaalden vorm aannemen als men heeft $b = 0$ en $4\mathrm{R}^2 = a^2$ of $2\mathrm{R} = a$, doch in dit geval is het ligchaam een regte cirkelvormige kegel, waarvan de hoogte gelijk is aan de middellijn der bazis; en elk regthoekig assenstelsel, waarvan het zwaartepunt de oorsprong is, zal alsdan een stelsel van hoofdassen zijn. Dit wordt ook nog bevestigd door dat hier de integralen $\int x^2 \delta m$, $\int y^2 \delta m$; $\int z^2 \delta m$ allen gelijk worden, namelijk $= \frac{3}{20} \mathrm{MR}^2$; bij Poisson vindt men aangetoond, dat in zulk een geval het gezegde plaats heeft. Zijn slechts twee der integralen b.v. $\int x^2 \delta m$ en $\int y^2 \delta m$ aan elkander gelijk, dan bestaan er nog een oneindig groot aantal stelsels van hoofd-assen, doch deze zullen allen de as der $z$ gemeen hebben; dit zal b.v. plaats hebben bij den regten cirkelvormigen kegel als de oorsprong der assen ergens in zijne as genomen wordt. Ook wordt dan in (B) alleen $b = 0$, dus $\phi = 0$, zoodat een der hoofd-assen overeenkomt met de as der $z$ of de as van den kegel; maar daar nu elk vlak dat door deze as gaat den kegel in twee symetrieke deelen verdeelt, is het $xz$ vlak onbepaald, en kunnen dus voor de twee andere hoofd-assen aangenomen worden twee lijnen, die door den oorsprong gaan en, in het $xy$vlak gelegen, onderling loodregt zijn.

Men kan ook gemakkelijk aantoonen, dat bij den scheven kegel geen dezer gevallen kan plaats hebben, omdat de integralen $\int x'^2 \delta m$, $\int y'^2 \delta m$ en $\int z'^2 \delta m$, waarin $x'$, $y'$ en $z'$ de coördinaten ten opzigte der hoofd-assen voorstellen, allen ongelijk worden. Men heeft namelijk omdat $x' = x\ Cos.\ \phi - z\ Sin.\ \phi$ en $z' = x\ Sin.\ \phi + z\ Cos.\ \phi$ is,

$$\int x'^2 \delta m = Cos.^2 \phi \int x^2 \delta m - 2\ Sin. \phi\ Cos. \phi \int xz \delta m + Sin.^2 \phi \int z^2 \delta m$$

$$\int y'^2 \delta m = \int y^2 \delta m = \int y_1^2 \delta m$$

$$\int z'^2 \delta m = Sin.^2 \phi \int x^2 \delta m + 2\ Sin. \phi\ Cos. \phi \int xz \delta m + Cos.^2 \phi \int z^2 \delta m.$$

Kon nu

$\int x'^2 \partial m = \int y'^2 \partial m$ of $\int x'^2 \partial m = \int z'^2 \partial m$ of $\int y'^2 \partial m = \int z'^2 \partial m$ worden, dan zoude men door voor de integralen hunne waarden te substitueren, namelijk $\int x^2 \partial m = \frac{3}{80} M(b^2+4R^2)$, $\int y^2 \partial m = \frac{3}{20} MR^2$, $\int z^2 \partial m = \frac{3}{80} Ma^2$, $\int xz \partial m = \frac{3}{80} Mab$ na herleiding eene der drie volgende vergelijkingen verkrijgen:

$$Tang.^2\phi\,(4R^2 - a^2) + 2ab\,Tang.\phi - b^2 = 0, \quad (1)$$

$$2ab\,Tang.2\phi - (4R^2 + b^2 - a^2) = 0, \quad (2)$$

$$Tang.^2\phi.\,b^2 + 2ab\,Tang.\phi - (4R^2 - a^2) = 0; \quad (3)$$

maar uit (B) volgt, als men opmerkt dat $Tang.2\phi = \frac{2\,Tang.\phi}{1-Tang.^2\phi}$ is,

$$Tang.^2\phi.\,ab - (4R^2 + b^2 - a^2)\,Tang.\phi - ab = 0. \quad (4)$$

Kon dus de vergelijking (1) voor eenige waarde van $a$, $b$ of R waar zijn, dan moest zij identiek zijn voor die waarde met (4), waartoe vereischt wordt

$$\frac{2ab}{4R^2 - a^2} = -\frac{4R^2 + b^2 - a^2}{ab}, \text{ en } \frac{b^2}{4R^2 - a^2} = 1;$$

het laatste geeft $b^2 = 4R^2 - a^2$, en de eerste uitdrukking verandert hierdoor in $\frac{a}{b} = -\frac{b}{a}$; dus zoude $a^2 = -b^2$ moeten zijn, hetgeen ongerijmd is. Door $b = 0$ en tevens $4R^2 - a^2 = 0$ of $2R = a$ te stellen, verdwijnt het ongerijmde, want de eerste uitdrukking wordt dan $\frac{0}{0} = \frac{0}{0}$.

Zoo ook zou uit (3) en (4) volgen

$$\frac{2a}{b} = -\frac{4R^2 + b^2 - a^2}{ab} \text{ en } \frac{4R^2 - a^2}{b^2} = 1,$$

dus wederom $4R^2 - a^2 = b^2$ en wegens de eerste uitdrukking, om het ongerijmde te doen verdwijnen $b = 0$.

Uit (2) heeft men $Tang.2\phi = \frac{4R^2 + b^2 - a^2}{2ab}$,

dus zoude men dan dienen te hebben

$$\frac{4R^2 + b^2 - a^2}{2ab} = -\frac{2ab}{4R^2 + b^2 - a^2}$$

of $$(4R^2 + b^2 - a^2)^2 = -8a^2b^2,$$

hetgeen onmogelijk is, zoo niet $4R^2 - a^2 = b^2 = 0$ of $2R = a$ en $b = 0$ wordt gesteld.

Men ziet dus, dat alleen bij den regten cirkelvormigen kegel, waarvan de hoogte gelijk is aan de middellijn der bazis, de drie integralen gelijk kunnen worden als het zwaartepunt de oorsprong is; dit zal dan ook (zie Poisson) het eenigste punt van dit ligchaam wezen, waarvoor de drie hoofdmomenten van traagheid even groot zijn, en waarvoor elk regthoekig assen-stelsel een stelsel van hoofd-assen is. Omdat bij den scheven kegel de integralen voor het zwaartepunt alle drie ongelijk zijn, bestaat er geen punt waarvoor dit plaats heeft, maar is er voor elk punt slechts één stelsel van hoofd-assen.

De uitdrukkingen $\int x'^2 \delta m$, $\int y'^2 \delta m$, $\int z'^2 \delta m$ worden bij den scheven kegel veel zamengestelder dan $\int x^2 \delta m$, $\int y^2 \delta m$ en $\int z^2 \delta m$, men zal daarom met voordeel van deze laatste gebruik kunnen maken, om het moment van traagheid van het ligchaam voor eenige as te bepalen. Trekt men namelijk door het zwaartepunt eene lijn evenwijdig aan die as en stelt men dat $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$ de hoeken zijn, die zij met de assen maakt, zoo is het moment van traagheid voor deze evenwijdige as, $N_1 = Sin.^2\alpha \int x^2 \delta m + Sin.^2\beta \int y^2 \delta m + Sin.^2\gamma \int z^2 \delta m - 2\, Sin.\alpha Sin.\gamma \int xz \delta m$, en is nu $d$ de afstand van de gegevene as tot aan het zwaartepunt, dan heeft men voor het gevraagde moment

$$N = N_1 + d^2 M \text{ (waarin M de massa is).}$$

Om de gevondene formulen te toetsen zullen wij dezelve op de volgende bijzondere gevallen toepassen.

1°. Laat het moment van traagheid gevraagd worden voor eenen regten kegel die om zijne as draait?

Hier is $b = 0$, $\int x^2 \delta m = \int y^2 \delta m = \frac{3}{20} MR^2$ en dus het gevraagde moment $= \int (x^2 + y^2) \delta m = \frac{3}{10} MR^2$.

(Zie de *Dynamica* van J. P. Delprat, bladz. 44, of die van I. R. Schmidt, bladz. 309, § 365.)

2°. Laat het moment van traagheid gevraagd worden voor eene as die door den top gaat en eenen hoek $\delta$ maakt met de as des kegels?

Door in de uitdrukking voor $N_1$ te stellen

$$\alpha = 90 - \delta, \beta = 90, \gamma = \delta$$

$\int x^2 \delta m = \int y^2 \delta m = \frac{3}{20} MR^2$, $\int z^2 \delta m = \frac{3}{80} Ma^2$, wordt

$$N_1 = \frac{3}{20} MR^2 (Cos.^2 \delta + 1) + \frac{3}{80} Ma^2 \, Sin.^2 \delta;$$

en dus het gevraagde moment, omdat hier $d = \frac{3}{4}\, a\, Sin.\, \delta$ is,

$$N = \tfrac{3}{20}\, MR^2\, (Cos.^2\, \delta + 1) + \tfrac{3}{80}\, Ma^2\, Sin.^2\, \delta + \tfrac{9}{16}\, Ma^2\, Sin.^2\, \delta$$

$$\text{of } N = \tfrac{3}{20}\, M\, \left\{R^2\, (1 + Cos.^2\, \delta) + 4a^2\, Sin.^2\, \delta\right\},$$

waarin $a$ de hoogte is van den kegel.

(Zie I. R. Schmidt, *Dynamica*, bl. 311, § 371).

## VRAAGSTUK B.

***Van twee punten is de afstand en het verschil in hoogte gegeven; indien nu de uiteinden van een touw, dat eene gegevene lengte heeft, in die punten bevestigd worden, en het touw vrijelijk nederhangende den vorm der kettinglijn aanneemt, hoe ver zal dan het laagste punt van elk der ophangpunten verwijderd zijn? Men verlangt de berekening dezer afstanden op een voorbeeld in getallen toegepast te zien.***

## OPLOSSING.

Veronderstel dat (zie Fig. 2) AC de boog zij der kettinglijn die de twee punten vereenigt, dan kunnen wij als bekenden aannemen den horizontalen afstand AB, het verschil in hoogte BC en de lengte van den boog AC; zij alzoo

$$AB = m, \qquad BC = n, \qquad Boog\ AC = l.$$

Laat DF, de verticale as der kettinglijn, voor as der ordinaten, en zekere horizontale FG voor as der abscissen aangenomen worden, zoo is de vergelijking der kettinglijn ten opzigte van deze assen

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waarin $e$ de bazis van het Neperiaansche logarithmenstelsel, en omdat voor $x = 0$, $y = a$ wordt, $a$ de lijn EF of de ordinaat van het laagste punt voorstelt.

Indien men deze ordinaat en de abscis AD of BD van een der punten A of C berekend heeft, zal men alles kunnen vinden, wat noodig is om de betrekkelijke ligging der punten A, E en C verder te kennen.

Hiertoe heeft men behalve de vergelijking (1) nog, wanneer S de

lengte van eenigen boog voorstelt, gerekend van het laagste punt E, en waarvan $x$ de projectie is op de as der abscissen

$$S = \frac{a}{2}\left\{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Stelt men nu AD $= b$, en in de vergelijkingen (1) en (2) achtervolgens

$$x = \text{AD} = b, \quad y = \text{FD}, \quad S = \textit{Boog}\ \text{AE},$$
$$x = \text{BD} = m - b, \; y = \text{FC}' = \text{FD} - n, \; S = \textit{Boog}\ \text{EC},$$

dan heeft men

$$\text{FD} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}} + e^{-\frac{b}{a}}\right), \; \textit{Boog}\ \text{AE} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{-\frac{b}{a}}\right),$$

$$\text{FD} - n = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{m-b}{a}} + e^{-\frac{m-b}{a}}\right), \textit{Boog}\ \text{EC} = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{m-b}{a}} - e^{-\frac{m-b}{a}}\right),$$

waaruit door aftrekking en optelling volgt:

$$\text{FD} - (\text{FD} - n) = n = \frac{a}{2}\left\{\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{\frac{m-b}{a}}\right) + \left(e^{-\frac{b}{a}} - e^{-\frac{m-b}{a}}\right)\right\},$$

$$\textit{Boog}\,\text{AE} + \textit{Boog}\,\text{EC} = l = \frac{a}{2}\left\{\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{-\frac{m-b}{a}}\right) - \left(e^{-\frac{b}{a}} - e^{\frac{m-b}{a}}\right)\right\},$$

en door het verschil der vierkanten te nemen

$$l^2 - n^2 = -a^2\left\{e^{\frac{b}{a}} - e^{\frac{m-b}{a}}\right\}\left\{e^{-\frac{b}{a}} - e^{\frac{m-b}{a}}\right\}$$

$$= a^2\left\{e^{\frac{m}{a}} - 2 + e^{-\frac{m}{a}}\right\} = a^2\left\{e^{\frac{m}{2a}} - e^{-\frac{m}{2a}}\right\}^2,$$

dus $\quad a\left\{e^{\frac{m}{2a}} - e^{-\frac{m}{2a}}\right\} = \sqrt{(l^2 - n^2)},$

of $\frac{m}{2a} = z$ stellende

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2z} = \frac{\sqrt{(l^2 - n^2)}}{m};$$

door deze vergelijking is $z$ en bijgevolg ook $a$ bepaald.

Verder kan men de uitdrukking voor $n$ op de volgende wijze herleiden:

$$n = \frac{a}{2}\left\{\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{-\frac{m-b}{a}}\right) + \left(e^{-\frac{b}{a}} - e^{\frac{m-b}{a}}\right)\right\}$$

$$n = \frac{a}{2}\left\{e^{\frac{m}{2a}}\left(e^{\frac{2b-m}{2a}} - e^{-\frac{2b-m}{2a}}\right) - e^{-\frac{m}{2a}}\left(e^{\frac{2b-m}{2a}} - e^{-\frac{2b-m}{2a}}\right)\right\}$$

$$= \frac{a}{2}\left\{e^{\frac{m}{2a}} - e^{-\frac{m}{2a}}\right\}\left\{e^{\frac{2b-m}{2a}} - e^{-\frac{2b-m}{2a}}\right\},$$

of omdat $\frac{m}{2a} = z$ is, en $\frac{2b-m}{2a} = v$ stellende,

$$n = \frac{m}{2} \cdot \frac{e^z - e^{-z}}{2z}(e^v - e^{-v}) = \frac{m}{2} \cdot \frac{\sqrt{(l^2 - n^2)}}{m}(e^v - e^{-v})$$

en

$$e^v - e^{-v} = \frac{2n}{\sqrt{(l^2 - n^2)}};$$

hieruit vindt men door oplossing van eene tweedemagtsvergelijking, waarvan alleen de positieve wortel eene bestaanbare waarde voor $v$ oplevert,

$$e^v = \sqrt{\frac{l+n}{l-n}}$$

en dus

$$v = Nep.\ Log.\ \sqrt{\frac{l+n}{l-n}}.$$

Als $z$ en $v$ bekend zijn, dan vindt men uit $\frac{m}{2a} = z$ en $\frac{2b-m}{2a} = v$,

$$a = \frac{m}{2z},\ b = \frac{m(v+z)}{2z} = a\,(v+z),$$

waardoor alles bepaald zal zijn; want men kan nu met de vergelijking (1) voor $x = b$ de ordinaat FD berekenen, hiervan EF $= a$ aftrekken en daardoor DE vinden, terwijl dan de afstanden AE en CE uit de regthoekige driehoeken ADE en CC'E, waarin de regthoekszijden bekend zijn, berekend kunnen worden.

Zoekt men nog voor $x = CC' = m - b$ de ordinaat FC′ en trekt men dezelve af van FD, dan moet dit verschil gelijk zijn aan het gegeven verschil in hoogte; en als men met de vergelijking (2) voor $x = b$ en $x = m - b$ de bogen EA en EC berekent, dan moet derzelver som gelijk zijn aan de gegeven lengte van het touw. Hierdoor kan men de juistheid der uitkomsten beproeven.

De vergelijking $\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \frac{\sqrt{(l^2 - n^2)}}{m} = p$ kan slechts bij benadering en door beproeving opgelost worden, en heeft geene bestaanbare wortels, indien niet $p > 1$ is, zijnde het *minimum* van $p$ voor $x = 0$, $p = 1$; uit $m < \sqrt{(l^2 - n^2)}$ volgt ook $l > \sqrt{(m^2 + n^2)}$ dat is, de lengte van het touw moet grooter zijn dan de afstand der ophangpunten, zoo als uit den aard der zaak van zelven op te maken is. Voldoet $p$ aan de gezegde voorwaarde, dan heeft de trancendente vergelijking twee gelijke doch tegengestelde wortels en niet meer, omdat $\frac{e^x - e^{-x}}{2x}$ van 1 tot oneindig aangroeijende er slechts eene positieve en eene gelijke negatieve waarde voor $x$ is, waardoor deze uitdrukking eene bepaalde waarde $p$ verkrijgt.

Door $e^x$ en $e^{-x}$ in reeksen te ontwikkelen, vindt men

$$1 + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \frac{x^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} + \text{enz.} = p;$$

is nu $p$ weinig meer dan 1, dan zal $x$ niet zeer groot zijn, en als men de 4^de^ en hoogere magten dezer grootheid verwaarloost, vindt men voor dit geval

$$x = \pm \sqrt{6(p-1)}; \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

verwaarloost men alleen de 6^de^ en hoogere magten, dan krijgt men door oplossing van eene vierkantsvergelijking

$$x^2 = -10 \pm 2\sqrt{5(6p-1)}, \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

waarvan alleen het bovenste teeken voor $x$ eene bestaanbare waarde geeft, namelijk:

$$x = \pm \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5(6p-1)})}.$$

Brengt men de 6^de^ magten nog in rekening, dan is $x$ bepaald door de vergelijking

$$x^6 + 42x^4 + 840x^2 - 5040(p-1) = 0;$$

of als men $x^2 = 2(x' - 7)$ stelt door de meer eenvoudige

$$x'^3 + 63x' - 14\,(45\,p + 11) = 0, \quad \ldots \quad (C)$$

welke altijd slechts éénen bestaanbaren positieven wortel zal hebben, omdat de coëfficiënt van $s'$ positief en de bekende term negatief is. Zoo als bekend is, kan men zulk eene vergelijking gemakkelijk met behulp eener logarithmen-sinustafel oplossen; stelt men daartoe

$$r = 2\sqrt{21},\ Tang.\,P = -\frac{3\sqrt{21}}{45p+11},\ \text{en}\ Tang.\,\phi = \sqrt[3]{Tang.\,\tfrac{1}{2}P},$$

dan is de positieve bestaanbare wortel

$$s' = -r\ Cot.\ 2\phi.$$

Heeft men op deze wijze, wanneer $p$ niet te groot is, de waarde van $s$ te naasten bij gevonden, dan kan men die in de oorspronkelijke vergelijking substitueren, om te onderzoeken of zij genoegzaam naauwkeurig is; maar ook in het algemeen voor alle mogelijke waarden van $p$ is de benadering van $s$ niet moeijelijk, en zal zij het voordeel hebben, dat men zeker weet tot hoeverre de benaderde waarde naauwkeurig is.

Stelt men namelijk in de vergelijking

$$\frac{e^s - e^{-s}}{2s} = p$$

$e^s = 10^u$ en dus $s = u\ Nep.\ Log.\ 10$, dan verandert zij in

$$\frac{10^u - 10^{-u}}{u} = 2p\ Nep.\ Log.\ 10,$$

onder welken vorm zij zeer geschikt is om met behulp van eene Briggiaansche-logarithmentafel opgelost te worden.

Het eerste lid $\frac{10^u - 10^{-u}}{u} = (w)$ groeit gedurig aan als $u$ vermeerdert, en als het tweede lid $2p\ Nep.\ Log.\ 10 = (q)$ zoo naauwkeurig mogelijk berekend is, zal men spoedig kunnen zien tusschen welke twee op elkander volgende geheele getallen $u$ gelegen is. Stel dat voor $u = r$, $w < q$ en voor $u = r + 1$, $w > q$ zij, maar dat in het eerste geval $w$ minder van $q$ verschilt dan in het tweede, dan weet men, dat $u$ tusschen $r$ en $r + 1$ gelegen, waarschijnlijk digter bij $r$ dan bij $r + 1$ is; men zal dus in $w$ voor $u$ achtervolgens kunnen substitueren $u = r + 0.1$, $u = r + 0.2$, . . . enz., totdat voor eene dezer waarden wederom $w > q$ wordt; was daarentegen $u$ vermoedelijk digter bij $r + 1$ dan bij $r$, dan zou men voor $u$ de waarden $r + 0.9$, $r + 0.8$, . . . enz. telkens met 0.1 afklimmende, kunnen substitueren, totdat $w < q$ werd.

Hierdoor vindt men voor $u$ twee grenzen, die slechts 0.1 verschillen, zoodat het cijfer der tiendedeelen bepaald zal zijn, en naarmate nu de gevondene waarden van $w$ aantoonen, dat $u$ het digtst bij de kleinste of bij de grootste grens is gelegen, zal men voor $u$ getallen substitueren, die met 0.01 opklimmen of afdalen, totdat men uit de waarden, die $w$ bekomt, voor $u$ twee grenzen kan aanwijzen, die slechts 0.01 verschillen, waardoor het cijfer der honderdste deelen gevonden is. Deze handelwijze, die wij door een voorbeeld zullen ophelderen, kan men voortzetten, telkens de insluitende grenzen voor $u$ vernaauwende, zoover als de naauwkeurigheid der logarithmentafels het toelaat.

Hierbij valt nu op te merken, dat de achtereenvolgende substitutiën zeer gemakkelijk kunnen gedaan worden, omdat de waarden van $u$ en hare arithmetische complementen tevens de logarithmen zijn van de magten van 10 die in $w$ voorkomen, namelijk

$Log.\ 10^u = u$, $Log.\ 10^{-u} = -u = (10 - u) - 10$;

men vindt deze magten dus dadelijk in de logarithmentafels en na dezelve van elkander afgetrokken te hebben, deelt men door $u$, het quotient zoolang voortzettende, totdat men beoordeelen kan of de gestelde waarde voor $u$ te groot of te klein is.

Tusschen twee achtereenvolgende grenzen voor $u$ zoude men hoogstens negen substitutiën behoeven te doen, om twee naauwere grenzen te verkrijgen, doch wordt dit aantal tot vijf verminderd, als men begint van de grens tot welke $u$ het meest nadert, dat is, die voor $w$ eene waarde geeft, welke het minst van $q$ verschilt; en men zal zelf nog eenige substitutiën kunnen uitsparen, als men tusschen twee grenzen de vermeerdering of vermindering van een derzelve bepaalt door eene evenredigheid, op denzelfden grond als men bij het zoeken der logarithmen de evenredige deelen berekent.

Stel namelijk dat voor $u = r$, $\quad w = q' < q$

en voor $\quad u = r + 1$, $w = q'' > q$

zij, dan moet $r$ zoodanig vermeerderd worden dat $w$ gelijk $q$ wordt of $q'$ met $q - q'$ aangroeit; daar nu 1 vermeerdering van $r$ eene aangroeijing $q'' - q'$ geeft, zoo heeft men de evenredige aangroeijing van $r$ gelijk $x$ stellende $q'' - q' : q - q' = 1 : x$; waaruit $x = \frac{q - q'}{q'' - q'}$; men zoude daarentegen $\frac{q'' - q}{q'' - q'}$ voor de vermindering van $r + 1$ hebben.

Alleen één cijfer dezer quotiënten gebruikende, verbetert men daarmede de waarde van $u$, en verrigt dan de substitutie, om te onderzoeken of die verbetering voldoende is, en om weder nieuwe grenzen, die slechts in de laatste decimaal verschillen, voor eene verdere benadering te verkrijgen.

Nog merken wij op, dat de achtereenvolgende deelingen, die men door $u$ moet doen, gemakkelijk afloopen, al moest men eenige malen de substitutiën herhalen, voor dat men het regte cijfer treft; want in den deeler verandert alleen het laatste cijfer, en de producten van den deeler met de gedeeltelijke quotiënten kunnen dus door bijtelling van een klein getal gemakkelijk uit de producten eener voorgaande deeling afgeleid worden.

Deze wijze van benadering is niet te omslagtig, zeker, kan altijd toegepast worden, welke ook de waarde van $p$ zij, en is zelfs des te gemakkelijker naarmate $p$ en bijgevolg ook $z$ grooter is, omdat dan de negatieve magt ($e^{-z}$ of $10^{-u}$) weinig invloed heeft op de waarde van het eerste lid, ten minste wanneer men zich tot zes of zeven decimalen in de waarde der onbekende bepaalt.

Indien de afstand der punten A en C, en hun verschil in hoogte BC gegeven zijn, dan kan men uit den regthoekigen driehoek ABC onmiddellijk hunnen horizontalen afstand berekenen; wij stellen dus als voorbeeld dat er gegeven zij

$$l = 10, \qquad m = 5, \qquad n = 3.5,$$

en berekenen eerst de waarden van $p$ en $q$, als volgt (met eene logarithmentafel van CALLET):

$$p = \frac{\sqrt{(l^2 - n^2)}}{m} \qquad\qquad q = 2p\, Nep.\, Log.\, 10$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $Log.\,(l+n) =$ | 1.1303338 | $Log.\,2 =$ | 0.3010300 |
| $Log.\,(l-n) =$ | 0.8129134 | $Log.\,p =$ | 0.2726536 |
| Som $=$ | 1.9432472 | Som $=$ | 0.5736836 |
| $2\,Log.\,m =$ | 1.3979400 | $Log.\,Nep.\,Log.\,10 =$ | 0.3622157 |
| Verschil $=$ | 0.5453072 | $Log.\,q =$ | 0.9358993 |
| | 2 / | | |
| $Log.\,p =$ | 0.2726536. | $q =$ | 8.627784. |

De vergelijking in $u$ is alzoo $\dfrac{10^u - 10^{-u}}{u} = 8.627784\ldots;$

voor $u = 0$, wordt $w = 2\,Nep.\,Log.\,10 = 4.604\ldots$ en voor

$u = 1$, $w = 9.9$; zoodat $u < 1$ en digter bij 1 dan bij 0 zal zijn, omdat 9.9 veel minder van 8.6.... verschilt dan 4.604...; wij stellen dus

$u = 0.9$ en vinden in de tafel $10^u = 7.9432867$

$-u = 9.1 - 10$ $\quad 10^{-u} = 0.1258925$

Verschil $= 7.8173942$

en dit door 0.9 deelende $\quad w = 8.68.....$ dus $u < 0.9$

$u = 0.8$ $\quad 10^u = 6.3095743$

$-u = 9.2 - 10$ $\quad 10^{-u} = 0.1584889$

Verschil $= 6.1510854$

$w = 7.68.....$ dus $u > 0.8$

en $u$ digter bij 0.9 dan bij 0.8; de evenredigheid $1 : 0.06 = 0.1 : x$ geeft $x = 0.006$ voor de vermindering van 0.9, dus

$u = 0.894$ $\quad 10^u = 7.8343000$

$-u = 9.106 - 10$ $\quad 10^{-u} = 0.1276439$

Verschil $= 7.7066561$

$w = 8.620....$ $u > 0.894$

$u = 0.895$ $\quad 10^u = 7.8523553$

$-u = 9.105 - 10$ $\quad 10^{-u} = 0.1273503$

Verschil $= 7.7250050$

$w = 8.631....$ $u < 0.895$

en uit de evenredigheid $0.01 : 0.004 = 0.001 : x$ vindt men $x = 0.0004$ voor de vermindering, dus

$u = 0.8946$ $\quad 10^u = 7.8451271$

$-u = 9.1054 - 10$ $\quad 10^{-u} = 0.1274676$

Verschil $= 7.7176595$

$w = 8.6271...$ $u > 0.8946$

$u = 0.8947$ $\quad 10^u = 7.8469335$

$-u = 9.1053 - 10$ $\quad 10^{-u} = 0.1274383$

Verschil $= 7.7194952$

$w = 8.6279...$ $u < 0.8947$

en het digtste bij 0.8947, waarvan de vermindering bepaald wordt uit $8 : 2 = 0.0001 : x$, dat is $x = 0.000025$, dus voor $x$ rekenende 0.00003 stellen wij

$u = 0.89467$ $\qquad 10^u = 7.8463917$

$-u = 9.10533 - 10 \qquad 10^{-u} = 0.1274471$

Verschil $= 7.7189446$

$w = 8.62770 \ldots u > 0.89467$

$u = 0.89468 \qquad 10^u = 7.8465717$

$-u = 9.10532 - 10 \qquad 10^{-u} = 0.1274442$

Verschil $= 7.7191275$

$w = 8.62781 \ldots u < 0.89468$

de vermindering dezer waarde is nagenoeg $x = 0.2$ eenheden van den laagsten rang, dus

$u = 0.894678 \qquad 10^u = 7.8465353$

$-u = 9.105322 - 10 \qquad 10^{-u} = 0.1274476$

Verschil $= 7.7190877$

$w = 8.627783 . u > 0.894678$

$u = 0.894679 \qquad 10^u = 7.8465535$

$-u = 9.105321 - 10 \qquad 10^{-u} = 0.1274445$

Verschil $= 7.7191090$

$w = 8.627797 . u < 0.894679$

en digter bij 0.894678, dat met $x = 0.07$ bijna $= 0.1$ vermeerderd kan worden, dus

$u = 0.8946781 \qquad 10^u = 7.8465382$

$-u = 9.1053219 - 10 \qquad 10^{-u} = 0.1274448$

Verschil $= 7.7190934$

$w = 8.627789 . u < 0.8946781$

wij weten dus zeker dat $u$ tusschen 0.8946780 en 0.8946781 ligt; zijn er bij de voorgaande berekeningen onnaauwkeurigheden begaan, dan behoeft men toch slechts de laatste na te rekenen, om zich te overtuigen dat die grenzen juist zijn; wij nemen dus voor de verdere berekeningen $u = 0.8946781$.

Volgens de aangewezen formulen heeft men:

$$z = u \, Nep. \, Log. \, 10, \qquad a = \frac{m}{2z}, \qquad v = Nep. \, Log. \sqrt{\frac{l+n}{l-n}},$$

$Log.\ u = 9.9516668$ $\qquad Log.\ m = 0.6989700$ $\qquad Log.\ \sqrt{\frac{l+n}{l-n}} = 0.1587102$

$Log.\ Nep.\ Log.\ 10 = 0.3622157$ $\qquad Log.\ 2z = 0.6149125$ $\qquad Log.\ Log.\ \sqrt{\quad} = 9.2006049$

$Log.\ z = 0.3138825$ $\qquad Log.\ a = 0.0840575$ $\qquad Log.\ Modulus = 9.6377843$

$z = 2.0600725$ $\qquad a = 1.2135494$ $\qquad$ Verschil $= 9.5628206$

$v = 0.3654438$

Als men $z$ negatief neemt wordt ook $a$ negatief, en de waarde van $b$ in dit geval

$$b' = -a(v - z) = 2az - a(v + z) = m - b,$$

zoodat men alsdan de abscis van het laagste punt C vindt; alzoo is

$b = a(z + v)$ $\qquad b' = -a(z - v) = a(v - z)$

$Log.\ a = 0.0840575$ $\qquad Log.\ a = 0.0840575$

$Log.\ (z + v) = 0.3848042$ $\qquad Log.\ (z - v) = 0.2290720$

$Log.\ b = 0.4688617$ $\qquad Log.\ b' = 0.3131295$

$b = 2.9434844$ $\qquad b' = 2.0565038$

men heeft dus vrij naauwkeurig $b + b' = 4.999982$, dat slechts 0.0000118 te klein is.

Om verder voor $x = b = AD$ en $x = b' = (m - b) = BD = CC'$ de ordinaten $y = FD$ en $y' = FC'$ almede de bogen $EA = S$ en $ED = S'$ te berekenen, schrijven wij de vergelijkingen (1) en (2) als volgt,

$$y = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \tfrac{1}{2}a\left(10^{\frac{x}{a}Log.e} + 10^{-\frac{x}{a}Log.e}\right) = \frac{a}{2}\left(10^{A} + 10^{-A}\right) = aM,$$

$$S = \tfrac{1}{2}a\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{a}{2}\left(10^{A} - 10^{-A}\right) = aM_1,$$

waarin dus ter bekorting gesteld is

$\frac{x}{a} Log. e = A$, $M = \frac{1}{2}(10^{A} + 10^{-A})$, $M_1 = \frac{1}{2}(10^{A} - 10^{-A})$

en dan heeft men

| | |
|---|---|
| voor $x = b = 2.9434844$ | voor $x = b' = (= - b) = 2.0561038$ |
| $Log. x = 0.4688617$ | $Log. x = 0.3131295$ |
| $Log. Log. e = 9.6377843$ | $Log. Log. e = 9.6377843$ |
| $0.1066460$ | $9.9509138$ |
| $Log. a = 0.0840575$ | $Log. a = 0.0840575$ |
| $Log. A = 0.0225885$ | $Log. A = 9.8668563$ |
| $A = 1.0533883$ | $A = 0.7359636$ |
| $-A = 8.9466117 - 10$ | $-A = 9.2640364 - 10$ |
| $10^{A} = 11.3080651$ | $10^{A} = 5.4445700$ |
| $10^{-A} = 0.0884324$ | $10^{-A} = 0.1836692$ |
| $2M = 11.3964975$ | $2M = 5.6282392$ |
| $M = 5.6982488$ | $M = 2.8141196$ |
| $Log. M = 0.7517414$ | $Log. M = 0.4493425$ |
| $Log. a = 0.0840575$ | $Log. a = 0.0840575$ |
| $Log. y = 0.8397989$ | $Log. y = 0.5334000$ |
| $y = 6.9151063 = FD$ | $y = 3.4150732 = FC'$ |
| $10^{A} = 11.3080651$ | $10^{A} = 5.4445700$ |
| $10^{-A} = 0.0884324$ | $10^{-A} = 0.1836692$ |
| $2M_1 = 11.2196327$ | $2M_1 = 5.2609008$ |
| $M_1 = 5.6098164$ | $M_1 = 2.6304504$ |
| $Log. M_1 = 0.7489487$ | $Log. M_1 = 0.4200301$ |
| $Log. a = 0.0840575$ | $Log. a = 0.0840575$ |
| $Log. S = 0.8330062$ | $Log. S = 0.5040876$ |
| $S = 6.8077906 = EA$ | $S = 3.1921816 = EC.$ |

Men vindt hier vrij naauwkeurig

$$FD - FC' = 3.5000331,$$
$$EA + EC = 9.9999722,$$

waarvan het eerste slechts 0.0000331 en het tweede slechts 0.0000278 van de oorspronkelijke gegevens verschilt.

Als men de waarde van $x$ door de derde magtsvergelijking (C) zoekt, dan vindt men

$p = 1.8735000$, $45p + 11 = 95.3075$, $P = -8°12'29''06$,
$\phi = -22°33'53''06.$, $Log.\ r = 0.9621396$

en met deze waarden

$s' = 9.1231915$ $s = \sqrt{4.24638300} = 2.0602$ iets te groot.

Men kan nu verder de afstanden AE en CE bepalen, waarvoor men heeft

$$AE = \sqrt{(AD^2 + DE^2)} = \sqrt{(b^2 + (y - a)^2)} = 6.4165\ldots$$
$$CE = \sqrt{(CC'^2 + C'E^2)} = \sqrt{((m - b)^2 + (y - n - a)^2)} = 2.9455\ldots$$

Voor een ander voorbeeld hebben wij genomen

$$m = 92, \qquad n = 5, \qquad l = 100;$$

en gevonden

$$p = 1.0855973, \qquad q = 4.9993597,$$

waarmede door benadering verkregen wordt

$$u = 0.3073655, \qquad s = 0.7077352,$$

en waaruit verder volgt

$a = 6.4996060$; $y = FD = 84.5673654$, $S = 54.1032345 = EA$,
$v = 0.0500419$, $y = FC' = 54.1032345$, $S = 45.8966526 = EC$,
$$b = 49.2525114$$
$$m - b = 42.7474886.$$

De formule (A) geeft

$$s = \sqrt{0.51358350} = 0.7166\ldots,$$

merkbaar te groot; de vergelijking (B)

$$s = \sqrt{0.50503180} = 0.70783\ldots,$$

nog te groot; terwijl de derde magtsvergelijking (C) geeft

$$P = -12°56'10''36, \qquad \phi = -25°49'35''20,$$
$$s' = 7.2504433, \qquad s = \sqrt{0.50088660} = 0.707733,$$

hetwelk tot in de vijfde decimaal naauwkeurig is.

Als in eenig geval $b > m$ en dus $b - m$ negatief wordt, dan liggen de beide ophangpunten aan dezelfde zijde der as, doch voor het overige verandert de berekening niet.

## VRAAGSTUK C.

*Een volkomen buigbaar doch ongelijkslachtig koord, is aan twee in dezelfde horizontale lijn gelegene punten van bekenden afstand opgehangen, en aan de werking der zwaartekracht overgelaten. Indien nu de vorm der kromme lijn, welke dat koord aanneemt, zoo mede de spanning in het laagste punt, gegeven*

*is, vraagt men:* 1°. *door eene algemeene formule de wet te bepalen, volgens welke de eenheid van massa, in de achtervolgende punten der kromme, verandert;* 2°. *deze formule toe te passen op het geval, waarin de kettinglijn in de gewone cycloïde overgaat, en hierbij tevens het gewigt van een willekeurig gedeelte der kromme te berekenen.*

## OPLOSSING.

Laat AOB (Fig. 3) eene kettinglijn zijn, gevormd door een volkomen buigbaar doch ongelijkslachtig koord en gelegen in het verticale vlak gaande door de ophangpunten A en B, dan zal ieder deel zoo als DE in evenwigt worden gehouden, door deszelfs gewigt, werkende volgens de verticaal van deszelfs zwaartepunt, en, door de spanningen in de uiteinden D en E, gerigt volgens de raaklijnen aan de kromme. Als men de verticaal die door haar laagste punt gaat voor as der ordinaten en eene willekeurige horizontale voor as der abscissen aanneemt, dan moet de vergelijking der kromme ten opzigte van deze assen en de ligging der assen zelve uit de voorwaarden van het vraagstuk bepaald worden, en zoo $\phi$ het gewigt voorstelt van eene lengte eenheid gelijkslachtig met eenige differentiaal der kromme, dan is $\phi\partial s$ het gewigt dezer differentiaal en $\int_{x}^{x'} \phi\partial s$, dat van een gedeelte zoo als DE, waarvan $OH = x$ en $OI = x'$ de abscissen der uiteinden zijn.

Als men door eenheid der massa verstaat de massa van eene lengte-eenheid gelijkslachtig met zekere differentiaal, dan kan deze eenheid der massa door $\phi$ worden voorgesteld. Daar ook de digtheid evenredig is aan de massa, kan $\phi$ eveneens de digtheid in elk punt van het koord voorstellen, wanneer men zoo als hier veronderstelt, dat het volumen eener lengte-eenheid niet verandert, en dus het koord over deszelfs geheele lengte cylindervormig zij.

Stelt men nu verder de ordinaten der uiteinden van DE, $HD = y$, $IE = y'$, de spanning bij D in de rigting DF gelijk S, de hoeken die hare rigting met de positieve assen OX en OY maakt $\alpha$ en $\beta$; de spanning bij E in de rigting EG gelijk S′, de hoeken die hare rigting bepalen $\alpha'$ en $\beta'$, en de abscis van het zwaartepunt van den boog DE gelijk $x_1$, dan zijn de vergelijkingen voor het evenwigt der krachten die op DE werken,

$$S\ Cos.\ \alpha + S'\ Cos.\ \alpha' = 0,$$

$$S\ Cos.\ \beta + S'\ Cos.\ \beta' - \int_x^{x'} \phi \partial s = 0;$$

$$S(x\ Cos.\beta - y\ Cos.\alpha) + S'(x'\ Cos.\beta' - y'\ Cos.\alpha') - x_1 \int_x^{x'} \phi \partial s = 0,$$

waarvan de beide eersten uitdrukken dat de som der zamenstellenden van die krachten, evenwijdig met elk der assen, gelijk nul zij, als men iedere kracht in twee andere evenwijdig aan die assen ontbindt, en de derde dit voor het resulterend koppel, dat die krachten opleveren, uitdrukt.

Wil men nu uit deze vergelijkingen de functie $\phi$ leeren kennen, dan moet men eene differentiaal der kromme beschouwen in plaats van een eindig deel DE; doet men dit, dan wordt

$$x' = x + \partial x, \quad y' = y + \partial y, \quad x_1 = x,$$

$$\int_x^{x'} \phi \partial s = \int_x^{x+\partial x} \phi \partial s = \partial(\int \phi \partial s) = \phi \partial s, S' = S + \partial S;$$

verder

$$Cos.\alpha' = -(Cos.\alpha + \partial\ Cos.\alpha),\ Cos.\beta' = -(Cos.\beta + \partial\ Cos.\beta),$$

of lettende op den zin waarin de spanningen werken, zoodat

$$Cos.\ \alpha = -\frac{\partial x}{\partial s},\ \text{en}\ Cos.\ \beta = -\frac{\partial y}{\partial s}\ \text{is},$$

$$Cos.\ \alpha' = \frac{\partial x}{\partial s} + \partial \frac{\partial x}{\partial s}, \quad Cos.\ \beta' = \frac{\partial y}{\partial s} + \partial \frac{\partial y}{\partial s};$$

brengt men nu deze waarden over in de vergelijkingen voor het evenwigt, zoo veranderen zij, als men de hoogere magten of producten van differentialen tegen de lagere weglaat, in

$$\partial \left(S \frac{\partial x}{\partial s}\right) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\partial \left(S \frac{\partial y}{\partial s}\right) = \phi \partial s, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\partial \left\{S \left(x \frac{\partial y}{\partial s} - y \frac{\partial x}{\partial s}\right)\right\} = \phi x \partial s; \quad \ldots\ldots (3)$$

de laatste vergelijking is een gevolg der beide eerste, want ontwikkelt men de differentiaal, dan bevindt men dat zij gelijk is aan de tweede met $x$ vermenigvuldigd, en van dit product de eerste, met $y$ vermenigvuldigd, afgetrokken, zoodat de twee eersten alleen voldoende zijn om het vraagstuk verder op te lossen.

Integreert men de eerste en neemt men in aanmerking, dat voor $x = 0$ de raaklijn horizontaal, of $\frac{\partial x}{\partial s} = 1$ is, dan verkrijgt men, de spanning in den top door C voorstellende,

$$S \frac{\partial x}{\partial s} = C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

en hieruit S overgebragt in (2)

$$\partial \left( C \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \phi \partial s$$

of

$$C \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \phi \frac{\partial s}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Stel nu dat men uit den gegeven vorm der kromme voor hare vergelijking gevonden heeft $y = F(x)$, dan is

$$\frac{\partial y}{\partial x} = F'(x), \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = F''(x), \frac{\partial s}{\partial x} = \sqrt{\left\{1 + F'(x)^2\right\}},$$

door $F'(x)$ en $F''(x)$ de eerste en tweede afgeleide functiën of differentiaalquotiënten, ten opzigte van $x$, van $F(x)$ voorstellende; en hiermede vindt men uit (5),

$$\phi = C \frac{F''(x)}{\sqrt{(1 + F'(x)^2)}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$\phi$ is dus eene functie van de coördinaten der kromme of van elke andere grootheid, die van deze afhankelijk is; terwijl de spanning in den top als standvastige in dezelve voorkomt, waardoor zij aan het beginsel der homogeniteit voldoet; zij drukt het gewigt uit van eene lengte-eenheid van een gelijkslachtig koord dat dezelfde digtheid heeft als het ongelijkslachtige in het punt dat met de abcis $x$ der kromme overeenkomt.

Men kan de vergelijkingen (4) en (5) ook onmiddellijk uit de figuur vinden; het gedeelte der kromme, begrepen tusschen het laagste punt C (Fig. 4) en eenig willekeurig punt A, wordt in evenwigt gehouden door de horizontale spanning in C, volgens CH, en door de spanning in A, volgens AB; verlengt men dus BA totdat zij de horizontale HF ontmoet in D, dan zal het gewigt van den boog CA volgens de verticaal door D moeten werken, en stelt men dit gewigt voor door DE, dan verkrijgt men, door dit te ontbinden volgens de rigtingen der spanningen in de uiteinden C en A, DF voor de horizontale spanning, en DG of EF voor die in A, terwijl

*Tang.* DFE $=$ *Tang.* ADF $= \frac{\partial y}{\partial x}$, en *Cos.* DFE $= \frac{\partial x}{\partial s}$ is, zoodat men aanstonds heeft,

$$\text{DF} = \text{EF } Cos. \text{ DFE, DE} = \text{DF } Tang. \text{ DFE},$$

$$C = S \frac{\partial x}{\partial s} \; . \; . \quad (4), \qquad \int_0^x \phi \partial s = C \frac{\partial y}{\partial x}$$

en door deze laatste te differentieren vindt men de vergelijking (5).

Uit $y = F(x)$ kan men vinden $s = F_1(x)$ of $x = f(s)$, en door dit in de formule voor $\phi$ over te brengen verkrijgt men de wet volgens welke de digtheid in het koord moet veranderen, aangewezen door eene functie der lengten, als hetzelve regt uitgespannen is, en gerekend van het punt dat met het laagste punt der kettinglijn overeenkomt.

Veronderstelt men alzoo dat de ophangpunten in eene horizontale lijn gelegen zijn, en dat het laagste punt, met het midden van den horizontalen afstand overeenkomende, tevens de kromme in twee gelijke en gelijkvormige deelen verdeelt, dan zal de digtheid van het midden naar de beide uiteinden op dezelfde wijze veranderen; en wanneer de vergelijking der kromme niet meer dan eene standvastige bevat, zal alsdan het vraagstuk bepaald zijn als nog b. v. de lengte van het touw gegeven is.

De uitdrukking voor $\phi$ gevonden blijft dezelfde, welke ook de veronderstelling zij omtrent den stand der ophangpunten en de wijze waarop de kromme lijn tusschen dezelve gelegen is; verschillende veronderstellingen hieromtrent, zullen slechts aanleiding tot meerdere of mindere zwarigheden geven, als men volgens de voorwaarden van het vraagstuk de vergelijking der kromme zoekt.

Wij zullen de gevondene formule voor $\phi$ aan een paar bekende gevallen toetsen; stel namelijk dat er voor $y = F(x)$ gegeven zij,

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)$$

en dat dus het koord de gewone kettinglijn moet vormen, dan zal men voor $\phi$ eene standvastige grootheid dienen te vinden, omdat het koord in dit geval gelijkslachtig moet zijn; uit de gegevene vergelijking volgt ook,

$$F'(x) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} - e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

$$F''(x) = \frac{1}{2h}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) = \frac{y}{h^2},$$

$$\sqrt{\left\{1 + F'(x)^2\right\}} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right) = \frac{y}{h},$$

zoodat men heeft $$\phi = \frac{C}{h}.$$

Als C in ponden en $h$ in lengte-eenheden wordt uitgedrukt, dan geeft het quotiënt dezer getallen het gewigt van eene lengte-eenheid van het gelijkslachtige touw.

Was er gegeven $y = F(x) = \frac{x^2}{p}$, welke vergelijking tot de parabool behoort, dan vindt men

$$\phi = C\,\frac{2}{\sqrt{(4x^2 + p^2)}} \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (A)$$

en voor het gewigt van eenen willekeurigen boog, gerekend van het laagste punt en waarvan $x$ de projectie is op de as der $x$,

$$\int_0^s \phi\delta s = \int_0^x \frac{2C}{p}\,\delta x = \frac{2Cx}{p},$$

zoodat dit gewigt evenredig is aan die projectie; men weet ook dat de parabolische kettinglijn gevormd wordt door gelijkmatig over eene horizontale lijn verspreide gewigten, doch wier aangrijpingspunten gelegen zijn op den boog, die de uiteinden dezer horizontale vereenigt.

Wanneer in (A) C in ponden uitgedrukt is en $x$ en $p$ in dezelfde lengte-eenheden, dan geeft dat quotiënt te kennen, hoeveel ponden zulk eene lengte-eenheid weegt van een touw, dat overal dezelfde digtheid heeft als het ongelijkslachtige in het punt dat met de abscis $x$ der kromme overeenstemt; zijnde de vergelijking der parabool niet zeer geschikt om $\phi$ in eene functie van $s$ uit te drukken.

Veronderstel nu (fig. 5) dat de kromme lijn, door het koord gevormd, een boog AB der cycloïde zij, dan is ook in dit geval alles bepaald door de lengte van het touw en den afstand AB, wanneer nog aangenomen wordt dat het laagste punt in het midden gelegen is, en den boog in twee gelijke en gelijkvormige deelen verdeelt; hierdoor is onmiddellijk de ligging van de as der

ordinaten CD bekend, en stelt men nu den straal EC van den voortbrengenden cirkel der cycloïde gelijk $r$, dan heeft men voor hare vergelijking, als men de raaklijn aan den top C voor as der abscissen aanneemt,

$$x = \sqrt{(2ry - y^2)} + r\, Boog\, \left(Sin.\ vers. = \frac{y}{r}\right);$$

terwijl men voor de lengte van eenen willekeurigen boog, gerekend van C en overeenkomende met de ordinaat $y$, heeft

$$s = 2\sqrt{2ry}.$$

Stelt men nu $AB = 2AF = 2m$, $Boog\ AB = 2\ Boog\ AC = 2l$, dan kan door de beide voorgaande vergelijkingen $r$ en de ligging van de as der $x$ bepaald worden, zoo als wij straks zullen aantoonen; terwijl men verder heeft

$$F'(x) = \frac{\delta y}{\delta x} = \sqrt{\frac{y}{2r - y}},$$

$$F''(x) = \frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \frac{r}{(2r - y)^2},$$

$$\sqrt{(1 + F'(x)^2)} = \sqrt{\frac{2r}{2r - y}}$$

en dus $\phi = C \dfrac{F''(x)}{\sqrt{(1 + F'(x)^2)}} = C \sqrt{\dfrac{r}{2(2r - y)^3}}$,

of hierin $y = \dfrac{s^2}{8r}$ substitueerende

$$\phi = \frac{16Cr^2}{\sqrt{(16r^2 - s^2)^3}} \quad \dots\dots\dots \quad (B)$$

Verder is het gewigt van eenigen boog $s$, gerekend uit het midden,

$$\int_0^s \phi \delta s = 16Cr^2 \int_0^s \frac{\delta s}{\sqrt{(16r^2 - s^2)^3}} = C \frac{s}{\sqrt{(16r^2 - s^2)}}, \quad (C)$$

en dat van een willekeurig stuk begrepen tusschen twee punten die op afstanden $s$ en $s'$ van het midden verwijderd zijn,

$$P = C\left\{\frac{s'}{\sqrt{(16r^2 - s'^2)}} - \frac{s}{\sqrt{(16r^2 - s^2)}}\right\}.$$

Uit de formule (B) volgt, dat de digtheid van het midden naar de uiteinden toeneemt, en dat het koord nooit eene geheele cycloïde zal kunnen vormen; want in dit geval zou voor de ophangpunten $s = l = 4r$ zijn en dus de digtheid aldaar $\infty$ moeten wezen; zoo ook het gewigt van den geheelen boog, aangewezen

door (C). Stelt men in deze laatste nog $s = l = \sqrt{(16r^2 - s^2)}$ of $s = l = 2r\sqrt{2}$, hetwelk met $y = r$ of met geval overeenkomt waarin het midden van de as der cycloïde op de horizontale lijn der ophangpunten ligt, dan heeft men $\int_0^s \phi \delta s = C$ en dus de spanning in den top gelijk aan het gewigt van het halve opgehangen koord.

Deze omstandigheden kunnen ook gemakkelijk uit de beschouwing der cycloïde gevonden worden; konde namelijk de boog eene geheele cycloïde zijn, dan moest, daar elk deel der buigbare lijn in rust is, de helft van den boog, begrepen tusschen het laagste punt en een der ophangpunten, in rust blijven onder de werking van deszelfs gewigt, van de spanning in het ophangpunt en van de spanning in den top; de beide eerste krachten zouden in verticale rigting werken, en dus nooit eene horizontale resultante tegengesteld met en gelijk aan de spanning in den top kunnen opleveren. Wanneer echter de digtheid nabij elk ophangpunt boven alle grenzen aangroeit, dan nadert ook het zwaartepunt van elken halven boog onophoudelijk tot dit punt, terwijl het gewigt der deelen nabij den top verdwijnt in vergelijking van dat der deelen nabij de ophangpunten; beide verticale krachten worden dan in vergelijking van de horizontale spanning oneindig groot, en het koord kan nabij de ophangpunten meer en meer de verticale rigting aannemen.

Is het middelpunt E van den beschrijvenden cirkel (Fig. 6) op de horizontale lijn AB der ophangpunten gelegen, dan is de raaklijn AD bij het ophangpunt evenwijdig aan de koorde van het quadrant van dien cirkel en doorsnijdt de horizontale van den top onder eenen hoek van 45°, waardoor in het parallelogram van krachten, gevormd uit de spanningen in het ophangpunt en in den top en uit het gewigt van den boog, de scherpe hoeken gelijk aan 45° worden, en dus is de diagonaal gelijk aan de horizontale zamenstellende, namelijk het gewigt van den boog gelijk aan de horizontale spanning in den top. Men zal op denzelfden grond bevinden, dat de spanning in den top grooter of kleiner is dan het gewigt van den geheelen boog, naarmate het middelpunt van den beschrijvenden cirkel boven of onder de lijn der ophangpunten is gelegen; zoo ook geeft de formule (C) $\int \phi \delta s < \text{of} > C$

naarmate $s < \text{of} > \sqrt{(16r^2 - s^2)}$ of $s < \text{of} > 2r\sqrt{2}$ is, hetwelk overeenkomt met $y = CF < \text{of} > r$ (Fig 5).

Men kan, door middel van eene eenvoudige meetkunstige constructie, afgeleid uit de vergelijkingen (B) en (C), de gewigten van de verschillende lengten van het koord, en de wijze waarop de digtheid verandert, door eene kromme lijn aanwijzen.

Zij namelijk (Fig. 7) AB de geheele lengte van het regtuit gespannen koord, C deszelfs midden en de loodlijn CE gelijk viermaal den straal van den beschrijvenden cirkel; door dan op CE eenen halven cirkel te beschrijven en daarin de koorde CG gelijk te nemen aan zekere lengte CD $= s$, voorts het aantal ponden van de spanning in den top voor te stellen door CF zal de loodlijn FH, CG in H snijdende, het gewigt voorstellen van den boog CD. Want trekt men nog de koorde EG, dan geven de gelijkvormige driehoeken CEG en CHF de evenredigheid

$$FH : CF = CG : EG$$

of
$$FH : C = s : \sqrt{(16r^2 - s^2)}$$

waaruit
$$FH = \frac{Cs}{\sqrt{(16r^2 - s^2)}}.$$

Maakt men dus in het punt D de loodlijn DI $=$ FH, dan zal men op deze wijze voor elk punt D het gewigt van den boog tot aan het punt C door eene ordinaat DI kunnen aanwijzen, en als men daarna alle punten I door eene kromme lijn vereenigt, dan zullen de ordinaten dezer kromme de gewigten der bogen aanwijzen waarvan hare abscissen de lengten zijn.

Als $\theta$ den hoek voorstelt, dien de raaklijn dezer kromme met de as der abscissen maakt, dan heeft men

$$Tang.\ \theta = \frac{16Cr^2}{\sqrt{(16r^2 - s^2)^3}};$$

neemt men dus, na de raaklijn aan zeker punt I getrokken te hebben, voor DK eene standvastige doch overigens willekeurige lengte, en trekt men door het uiteinde K, KL evenwijdig aan de raaklijn, dan zal DL de digtheid in het punt D voorstellen; en herhaalt men deze constructie over de geheele lengte CB, dan zal men de punten L door eene kromme lijn kunnen vereenigen, die door door hare ordinaten de verandering der digtheid van het midden naar het einde aanwijst.

Men ziet nu ook uit deze constructie, dat het gewigt van het

geheele koord en de digtheid in de uiteinden oneindig groot zouden worden, als hetzelve eene geheele cycloïde moest vormen; want alsdan zoude CB $=$ $4r$ $=$ CE zijn, de lijn CG op CE vallen en dus evenwijdig zijn aan de loodlijn in F, waardoor FH voor het uiterste punt oneindig groot wordt; zoo ook is de raaklijn voor het punt, dat met B overeenstemt, in dat geval loodregt op de as der abscissen, waardoor ook de ordinaat die de digtheid aldaar voorstelt oneindig groot wordt. In het geval van eene geheele cycloïde is de loodlijn door het uiteinde B eene asymptoot van beide kromme lijnen, terwijl de lijn der gewigten de as der abscissen niet raakt, maar in het punt C dezelve snijdt onder eenen hoek waarvan de tangens gelijk is aan $\frac{C}{4r}$; de raaklijn door C staat dus loodregt op EF, waardoor de ordinaat die de digtheid aangeeft in het punt C niet niet gelijk nul is, zoo als voor het overige ook van zelve duidelijk is.

Men moet hierbij opmerken, dat deze constructie de gewigten der bogen doet kennen, als men eene willekeurige lijn heeft aangenomen om bijv. een pond voor te stellen, en CF gelijk aan zoo veel maal die lijn neemt als het aantal ponden van C bedraagt; maar dat de kromme voor de digtheid slechts de verhouding der digtheden voor verschillende punten van het koord doet kennen; vindt men namelijk bij eenig punt de ordinaat der digtheid $n$ maal zoo groot als bij een ander, dan is dit ook de verhouding der digtheden in deze punten. Wil men de kromme zoodanig regelen, dat hare ordinaten de gewigten der lengte-eenheden van gelijkslachtige koorden, die dezelfde digtheid hebben als het ongelijkslachtige, in de punten waarbij die ordinaten behooren, uitdrukken in dezelfde eenheden als de gewigten der bogen, dan geraakt men daartoe op de volgende wijze.

Voor den top is de digtheid $\phi = \frac{C}{4r}$, maar men kan C vervangen door het gewigt van zekere lengte van een gelijkslachtig touw, waarvan elke lengte-eenheid $p$ ponden weegt; zij $a$ deze lengte en dus $C = ap$, dan wordt $\phi = p\,\frac{a}{4r}$. Neemt men nu (Fig. 8) $CE = 4r$, $CF = a$ (volgens de schaal (Fig. 7) gebruikt) en $CG = p$ op de schaal die voor de spanning $CF = C$ ℭ is aangenomen; en trekt men GH evenwijdig aan EF, dan is

$$CH = \frac{CF \times CG}{CE} = \frac{ap}{4r};$$

men moet dus de eenheid KD van (Fig. 7) zoodanig kiezen, dat daarmede in den top de digtheid door CH wordt aangewezen, maakt men daartoe CH′ (Fig. 7) $=$ CH (Fig. 8) en trekt men door H′ eene lijn, evenwijdig aan de raaklijn in C, dan is CL′ de lengte die men voor DK moet aannemen.

Wij moeten nu nog aantoonen, hoe men, uit de lengte van het koord en den afstand der ophangpunten, den straal van den beschrijvenden cirkel en het overige kan bepalen. Hiertoe heeft men de vergelijkingen

$$x = \sqrt{(2ry - y^2)} + r \ Boog \ (Sin. \ vers. = \frac{y}{r})$$

en

$$s = 2\sqrt{2ry};$$

door in de eerste $x$ gelijk aan den halven horizontalen afstand, in de tweede $s$ gelijk aan de halve lengte van den boog te stellen en vervolgens $y$ te elimineeren, zou men eene vergelijking verkrijgen, waarin alleen $r$ voorkomt, doch die wegens het trancendente gedeelte niet dan met zeer veel moeite door lastige benaderingen opgelost zal kunnen worden. Wij vervangen daarom de eerste vergelijking door de twee bekende

$$x = r\,(\theta_1 + Sin.\ \theta_1) \qquad y = r\,(1 - Cos.\ \theta_1),$$

waarin $\theta_1$ den hoek CEG (Fig 5) voorstelt; de tweede vergelijking verandert dan in $s = 4r\ Sin.\ \frac{1}{2}\,\theta_1$.

Stelt men nu (Fig. 5) AF $= m$, *Boog* AC $= l$ en $\angle$CEK $= \theta$, dan heeft men

$$m = r\,(\theta + Sin.\ \theta) \qquad l = 4r\ Sin.\ \tfrac{1}{2}\,\theta$$

en door $r$ te elimineeren,

$$\frac{\theta + Sin.\ \theta}{Sin.\ \frac{1}{2}\theta} = \frac{4m}{l} \text{. . . . . . . . (D)}$$

uit deze kan men $\theta$ oplossen, terwijl dan $r = \dfrac{l}{4\ Sin.\ \frac{1}{2}\theta}$ is.

Van $\theta = 0°$ tot $\theta = 180°$, neemt het eerste lid van de vergelijking (D) gedurig af, omdat het eerste differentiaal-quotient $\dfrac{Cos.\ \frac{1}{2}\theta\ (Sin.\ \theta - \theta)}{2\ Sin^2\ \frac{1}{2}\theta}$ tusschen deze grenzen bestendig negatief is; voor $\theta = 0$ is de grootste waarde dier uitdrukking $= 4$ en voor $\theta = 180°$ is die waarde $= \pi$; neemt men nu in aanmer-

king dat onder de waarden van $\theta$ die aan het vraagstuk voldoen, er noodzakelijk ééne tusschen 0° en 180° ligt; dan volgt daaruit dat de gegevene grootheden aan de beide voorwaarden moeten voldoen, dat $\frac{4m}{l} < 4$ en $\frac{4m}{l} > \pi$ is; de eerste wil niet anders zeggen dan dat de horizontale afstand kleiner moet zijn dan de lengte van het koord, zoo als van zelven spreekt; uit de tweede volgt $2l < 4.\frac{2m}{\pi}$, dat is de lengte van het koord, mag niet grooter zijn dan viermaal de middellijn van eenen cirkel, waarvan de horizontale afstand de omtrek is; hetwelk men ook uit de beschouwing der cycloïde kan vinden, als men in aanmerking neemt dat alle cycloïden gelijkvormig zijn en dat de lengte eener geheele cycloïde juist gelijk is aan viermaal de middellijn van den voortbrengenden cirkel.

Als nu $\frac{4m}{l} < 4$ en $\frac{4m}{l} > \pi$ is, kan de vergelijking (D) op de volgende wijze door benadering opgelost worden.

Stelt men $\frac{1}{2}\theta = \psi$ en $\frac{2m}{l} = b$, dan verandert zij in

$$\frac{\psi + Sin.\ \psi\ Cos.\ \psi}{Sin.\ \psi} = b \quad \ldots\ldots \quad (E)$$

Zij nu $\alpha$ eene waarde voor $\psi$ die te naastenbij voldoet, zoodanig dat $\psi = \alpha + \delta$ en $\delta$ zeer klein is, waardoor $Sin.\ \delta = \delta$ en $Cos.\ \delta = 1$ gesteld mag worden, en bijgevolg

$$Sin.\ \psi = Sin.\ \alpha + \delta\ Cos.\ \alpha$$
$$Cos.\ \psi = Cos.\ \alpha - \delta\ Sin.\ \alpha,$$

dan vindt men, door dit in de vergelijking (E) te substitueren, en de tweede magten van $\delta$ te verwaarloozen,

$$\delta = \frac{\alpha - Sin.\ \alpha\ (b - Cos.\ \alpha)}{Cos.\ \alpha\ (b - 2\ Cos.\ \alpha)}.$$

Stelt men dan weder $\alpha + \delta = \alpha'$ en $\psi = \alpha' + \delta'$, zoo kan $\delta'$ op dezelfde wijze uit $\alpha'$ berekend worden als $\delta$ uit $\alpha$ berekend is, en zoo voortgaande zal men $\psi$ zoo naauwkeurig benaderen als men verkiest. De eerste waarde voor $\psi$ moet men door gissing en beproeving verkrijgen.

Zij b. v. gegeven $2m = 3.0221688$ en $2l = 3.1017336$,

en gevraagd den boog der cycloïde te bepalen, die het koord zal vormen als de digtheid naar behooren verandert?

Men heeft vooreerst $b = \frac{2m}{l} = 1.9486960$, en dus is de vergelijking, waaruit $\psi$ of $\frac{1}{2}\theta$ moet bepaald worden,

$$\frac{\psi + Sin.\ \psi\ Cos.\ \psi}{Sin.^2 \psi} = 1.9486960;$$

voor $\psi = 20°$ wordt het 1e lid grooter, en voor $\psi = 30°$ kleiner dan het 2e, dus $\psi > 20°$ en $< 30°$; door eene nadere beproeving vindt men $\psi > 22°$ en $< 23°$.

Voor $\alpha = 22°$ wordt volgens de aangewezene benaderings-formule $\delta = 0.0149475$, dus $\alpha' = \alpha + \delta = 0.3989199 = 22°51'23''$.

Verder wordt voor $\alpha' = 0.3989199$, $\delta' = -0.0007554$, dus $\alpha'' = 0.3981645 = 22°48'47''$, $\delta'' = -0.0000083$, en $\alpha''' = 0.3981562$.

Deze laatste waarde is reeds zoo naauwkeurig, dat men nu de logarithmen tot meer dan 7 decimalen zoude moeten gebruiken, om $\psi$ verder te benaderen; ook wordt de teller van $\delta$, namelijk $\alpha - Sin.\ \alpha\,(b - Cos.\ \alpha)$, die hetzelfde is als de vergelijking (E), wanneer men haar tot nul herleid heeft, voor $\alpha''$ reeds niet grooter dan 0.0000008, zoodat men zeer naauwkeurig zal kunnen stellen

$$\psi = \alpha''' = 22°48'45'',$$

dus

$$\theta = 2\psi = 45°37'30'',$$

en verder is $r = \frac{l}{4\ Sin.\ \frac{1}{2}\theta} = \frac{l}{4\ Sin.\ \psi} = 10.\ldots\ldots$

Men kan nu verder den boog door berekening of constructie bepalen. In het eerste geval heeft men (Fig. 5) voor FC

$$FC = y = r\,(1 - Cos.\ \theta),$$

en maakt men, om de punten tusschen C en A in ligging te bepalen, gebruik van $x = r\,(\theta + Sin.\ \theta)$, $y = r\,(1 - Cos.\ \theta)$.

De constructie kan als volgt ingerigt worden. Trek, door een willekeurig punt H, van de loodlijn op het midden van AB, eene lijn HI zoodanig, dat $\angle$ CHI $= \theta$ en HI $= r$ zij; trek uit I eene lijn IK evenwijdig aan CD, AB in het punt K ontmoetende, en KE evenwijdig aan HI, dan is E het middelpunt van den beschrijvenden cirkel, en nu de cycloïde op de gewone wijze construerende, zal het gedeelte tusschen A en B de boog zijn, die door het koord gevormd wordt.

Het berekenen van de digtheid in eenig punt, of van het gewigt van eenen willekeurigen boog, geschiedt door de gevondene formulen, zonder eenige zwarigheid, indien de spanning C gegeven is.

## VRAAGSTUK D.

*Wanneer op een ligchaam verschillende krachten werken, waarvan de aangrijpingspunten en rigtingen willekeurig gegeven zijn, vraagt men dat ligchaam in evenwigt te houden, door twee krachten, die elkander regthoekig kruisen, en waarvan er ééne, door een gegeven punt gaande, eene gegevene grootte heeft.*

*Men verlangt deze vraag, zoowel zonder als met behulp van stelkunstige formulen, opgelost te zien.*

## OPLOSSING.

Als men den oorsprong van drie regthoekige assen in het gegeven aangrijpingspunt stelt, dan kunnen de krachten, die op het ligchaam werken, herleid worden tot eene kracht volgens de as der $x$, $X = \Sigma.P \; Cos.\alpha$, eene kracht volgens de as der $y$, $Y = \Sigma.P \; Cos.\beta$ en eene kracht volgens de as der $z$, $Z = \Sigma.P \; Cos.\gamma$, en tot drie koppels L, M en N, elk loodregt op een dezer assen zijnde,

$$L = \Sigma.P \, (y \; Cos.\gamma - z \; Cos.\beta),$$
$$M = \Sigma.P \, (z \; Cos.\alpha - x \; Cos.\gamma),$$
$$N = \Sigma.P \, (x \; Cos.\beta - y \; Cos.\alpha);$$

in deze formulen worden de krachten door P, de coördinaten van hare aangrijpingspunten door $x$, $y$ en $z$, en de hoeken die zij met de assen maken door $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$ voorgesteld.

De drie krachten X, Y en Z vereenigen zich tot eene resultante $R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$, gaande door den oorsprong en makende met de assen hoeken $a$, $b$ en $c$, bepaald door

$$Cos.\,a = \frac{X}{R}, \quad Cos.\,b = \frac{Y}{R}, \quad Cos.\,c = \frac{Z}{R}.$$

Zoo ook kunnen de drie koppels L, M en N tot een enkel resulterend koppel herleid worden, $S = \sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}$, waarvan de as hoeken $l$, $m$ en $n$ met de assen maakt, bepaald door

$$Cos.\,l = \frac{L}{S},\quad Cos.\,m = \frac{M}{S},\quad Cos.\,n = \frac{N}{S}.$$

Den hoek, tusschen de resultante en de as van het resulterend koppel, $\phi$ noemende, zoo is

$$Cos.\phi = \frac{XL + YM + ZN}{RS} = Cos.a\,Cos.l + Cos.b\,Cos.m + Cos.c\,Cos.n.$$

De krachten moeten in de formulen steeds positief genomen worden; de zin waarin zij werken wordt dan aangeduid door de hoeken, die de rigtingen, volgens welke zij trekken, met de positieve assen maken; deze hoeken moeten en behoeven ook nooit grooter dan 180° genomen te worden.

Wanneer voorts eene kracht ontbonden wordt in niet meer dan drie onderling regthoekige, zullen wij de zamenstellenden volgens de rigtingen der ontbinding, de projectiën van de kracht op die rigtingen noemen. Wordt alzoo eene kracht in twee andere ontbonden, waarvan de eene evenwijdig aan en de andere loodregt op eenig vlak is, dan is de eerste zamenstellende de projectie der kracht op dat vlak, en de tweede zamenstellende de projectie van die kracht op de normaal van het vlak.

Al wat tot deze herleiding der krachten noodig is, kan men ontwikkeld vinden in de Statica van den Heer J. P. Delprat; wij veronderstellen voor het volgende, dat de grootheden X, Y, Z, L, M, N, enz., volgens de aangewezen formulen berekend zijn.

Waren de krachten in evenwigt, dan zou men vinden:

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0,\ X = 0,\ Y = 0,\ Z = 0;$$

maar dit evenwigt moet ontstaan door bijvoeging van twee onderling loodregte krachten, waarvan er ééne in grootte bepaald is en door een gegeven punt gaat; stel deze kracht $= P$, de hoeken die zij met elk der assen maakt $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$; stel de grootte der andere kracht $= Q$, de hoeken die hare rigting bepalen $\alpha_1$, $\beta_1$ en $\gamma_1$, en laten $x$, $y$ en $z$ de coördinaten zijn van een willekeurig punt van hare rigting; door dan P en Q te ontbinden in drie andere krachten evenwijdig aan de assen, en de drie zamenstellenden van Q in den oorsprong over te brengen, verkrijgt men de volgende vergelijkingen voor het evenwigt,

$X + P\,Cos.\alpha + Q\,Cos.\alpha_1 = 0$ . . (1) $L + Q(y\,Cos.\gamma_1 - z\,Cos.\beta_1) = 0$ . . (4)

$Y + P\,Cos.\beta + Q\,Cos.\beta_1 = 0$ . . (2) $M + Q(z\,Cos.\alpha_1 - x\,Cos.\gamma_1) = 0$ . . (5)

$Z + P\,Cos.\gamma + Q\,Cos.\gamma_1 = 0$ . . (3) $N + Q(x\,Cos.\beta_1 - y\,Cos.\alpha_1) = 0$ . . (6)

terwijl men nog volgens bekende eigenschappen, en omdat P en Q onderling loodregt zijn, de voorwaarden heeft,

$$Cos.^2 \alpha + Cos.^2 \beta + Cos.^2 \gamma = 1 \ldots \ldots (7)$$
$$Cos.^2 \alpha_1 + Cos.^2 \beta_1 + Cos.^2 \gamma_1 = 1 \ldots (8)$$
$$Cos. \alpha \, Cos. \alpha_1 + Cos. \beta \, Cos. \beta_1 + Cos. \gamma \, Cos. \gamma_1 = 0. \ (9)$$

In deze vergelijkingen zijn zeven onbekende grootheden, namemelijk Q, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha_1$, $\beta_1$ en $\gamma_1$ en drie onbepaalde $x$, $y$, en $z$; maar deze laatste verdwijnen als men (4) met $Cos. \alpha_1$, (5) met $Cos. \beta_1$ en (6) met $Cos. \gamma_1$ vermenigvuldigt, en de som van die producten neemt; dit geeft dan

$$L \, Cos. \alpha_1 + M \, Cos. \beta_1 + N \, Cos. \gamma_1 = 0; \ . \ (10)$$

deze vergelijking, of wat hetzelfde is

$$Cos. l \, Cos. \alpha_1 + Cos. m \, Cos. \beta_1 + Cos. n \, Cos. \gamma_1 = 0,$$

toont aan dat Q loodregt op de as, dus evenwijdig met het vlak, van het resulterend koppel S is.

Vermenigvuldigt men (7) met $P^2$, (8) met $Q^2$ en (9) met $2PQ$, dan is de som der producten

$$(P \, Cos. \alpha + Q \, Cos. \alpha_1)^2 + (P \, Cos. \beta + Q \, Cos. \beta_1)^2 +$$
$$+ (P \, Cos. \gamma + Q \, Cos. \gamma_1)^2 = P^2 + Q^2,$$

of ingevolge (1), (2) en (3)

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = P^2 + Q^2$$

dat is
$$R^2 = P^2 + Q^2;$$

hieruit ziet men, dat elk der krachten P en Q kleiner dient te zijn dan de resultante R; voldoet P aan deze voorwaarde, dan is

$$Q = + \sqrt{(R^2 - P^2)}.$$

Vermenigvuldigt men (1) met $Cos. \alpha$, (2) met $Cos. \beta$ en (3) met $Cos. \gamma$, dan is de som der producten

$$(X \, Cos. \alpha + Y \, Cos. \beta + Z \, Cos. \gamma) + P(Cos.^2 \alpha + Cos.^2 \beta + Cos.^2 \gamma)$$
$$+ Q(Cos. \alpha \, Cos. \alpha_1 + Cos. \beta \, Cos. \beta_1 + Cos. \gamma \, Cos. \gamma_1) = 0,$$

of ingevolge (7) en (9)

$$X \, Cos. \alpha + Y \, Cos. \beta + Z \, Cos. \gamma + P = 0;$$

op dezelfde wijze verkrijgt men door (1), (2) en (3) met $Cos. \alpha_1$, $Cos. \beta_1$ en $Cos. \gamma_1$ te vermenigvuldigen

$$X \, Cos. \alpha_1 + Y \, Cos. \beta_1 + Z \, Cos. \gamma_1 + Q = 0;$$

en deze vergelijkingen dezelfde zijnde als

$$Cos. a \, Cos. \alpha + Cos. b \, Cos. \beta + Cos. c \, Cos. \gamma + \frac{P}{R} = 0,$$

$$Cos.\,a\;Cos.\,\alpha_1 + Cos.\,b\;Cos.\,\beta_1 + Cos.\,c\;Cos.\,\gamma_1 + \frac{Q}{R} = 0,$$

toonen aan, dat de zamenstellenden, die men verkrijgt door R volgens de rigtingen van P en Q te ontbinden, even groot als, doch tegengesteld aan P en Q zijn; stelt men namelijk de hoeken, die R met P en Q maakt, voor door $\theta$ en $\theta'$, dan geven zij

$$Cos.\,\theta = -\frac{P}{R},\quad Cos.\,\theta' = -\frac{Q}{R} = -\frac{\sqrt{(R^2 - P^2)}}{R};$$

deze hoeken zijn dus altijd stomp, en daar

$$Cos.^2\,\theta + Cos.^2\,\theta' = \frac{P^2}{R^2} + \frac{Q^2}{R^2} = 1$$

en tevens $\theta$ zoowel als $\theta'$ kleiner dan 180° is, heeft men $\theta' = 270° - \theta$. Verder is de hoek tusschen P en Q regt; trekt men dus uit den oorsprong eene lijn evenwijdig aan Q, dan is de som der hoeken, die rondom dit punt gevormd worden door R, P en Q,

$$\angle(R.P) + \angle(R.Q) + \angle(P.Q) = \theta + (270° - \theta) + 90°,$$

juist gelijk 360°; deze lijnen liggen alzoo in één vlak, en hieruit volgt, dat Q evenwijdig is met het vlak dat door de resultante R en de kracht P gaat.

Vermenigvuldigt men (1) met L, (2) met M en (3) met N, dan geeft de som der producten, na door P gedeeld te hebben, en ingevolge (10),

$$L\,Cos.\,\alpha + M\,Cos.\,\beta + N\,Cos.\,\gamma + \frac{XL + YM + ZN}{P} = 0,$$

of $Cos.\,l\,Cos.\,\alpha + Cos.\,m\,Cos.\,\beta + Cos.\,n\,Cos.\,\gamma + \dfrac{XL + YM + ZN}{PS} = 0$

en omdat $\dfrac{XL + YM + ZN}{RS} = Cos.\,\phi$ is

$$Cos.\,l\,Cos.\,\alpha + Cos.\,m\,Cos.\,\beta + Cos.\,n\,Cos.\,\gamma + \frac{R}{P}\,Cos.\,\phi = 0;$$

dat is, den hoek tusschen P en de as van het koppel $\psi$ noemende,

$$Cos.\,\psi = -\frac{R}{P}\,Cos.\,\phi;$$

deze hoek zal dus scherp of stomp zijn naarmate $\phi$ stomp of scherp is, en de verkregene uitkomst of $P\,Cos.\,\psi = -R\,Cos.\,\phi$ wijst aan, dat als men P en R ontbindt in twee onderling regthoekige krachten, waarvan bij beide ééne volgens de as van het koppel gerigt is, de zamenstellende van P in die rigting gelijk doch te-

gengesteld is aan die van R in dezelfde rigting, en dat $P > \pm R\,Cos.\phi$ moet zijn.

Al wat tot de bepaling van P en Q noodig is, heeft men nu gevonden; de hoeken $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$ kunnen berekend worden uit de vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} Cos.^2\,\alpha + Cos.^2\,\beta + Cos.^2\,\gamma = 1, \\ Cos.a\,Cos.\alpha + Cos.b\,Cos.\beta + Cos.c\,Cos.\gamma = Cos.\theta = -\frac{P}{R}, \\ Cos.l\,Cos.\alpha + Cos.m\,Cos.\beta + Cos.n\,Cos.\gamma = Cos.\psi = -\frac{R}{P}Cos.\phi, \end{array}\right\}(A)$$

en $\alpha_1$, $\beta_1$ en $\gamma_1$ uit:

$$\left.\begin{array}{l} Cos.^2\,\alpha_1 + Cos.^2\,\beta_1 + Cos.^2\gamma_1 = 1, \\ Cos.a\,Cos.\alpha_1 + Cos.b\,Cos.\beta_1 + Cos.c\,Cos.\gamma_1 = -Sin.\theta = -\frac{\sqrt{(R^2 - P^2)}}{R}, \\ Cos.l\,Cos.\alpha_1 + Cos.m\,Cos.\beta_1 + Cos.n\,Cos.\gamma_1 = 0; \end{array}\right\}(B)$$

beide groepen leiden in het algemeen tot eene tweede magtsvergelijking, doch geven niet meer dan twee stelsels voor de zes onbekenden, omdat deze ook nog voldoen moeten aan,

$$Cos.\,\alpha\,Cos.\,\alpha_1 + Cos.\,\beta\,Cos.\,\beta_1 + Cos.\,\gamma\,Cos.\,\gamma_1 = 0.$$

De algemeene formulen uit deze oplossing voortkomende, zijn te zamengesteld om er verder eenig gevolg uit te kunnen afleiden; evenwel is nu het vraagstuk geheel opgelost, want als $\alpha_1$, $\beta_1$ en $\gamma_1$ gevonden zijn, dan geven de vergelijkingen (4), (5) en (6) de vergelijkingen voor de ligging van Q. Omdat die hoeken aan de vergelijking (10) voldoen, is elk der vergelijkingen (4), (5) en (6) van de beide overigen afhankelijk, zoo als vereischt wordt, indien zij eene lijn moeten voorstellen.

Wanneer men door denzelfden oorsprong een nieuw regthoekig assenstelsel aanneemt, dan kan men de vergelijkingen, die de bijzonderheden van het vraagstuk bevatten, vereenvoudigen. Neemt men daartoe het vlak, gaande door de resultante en de as van het koppel, als $x'z'$vlak en de (positieve) as van het koppel als as der $+ z'$, dan zijn ook de overige assen bepaald; de positieve as der $x'$ kan men zoodanig kiezen, dat de resultante eenen scherpen hoek met haar maakt; maar om nu voor de algemeene herleiding der krachten de formulen op dezelfde wijze te verkrijgen, als zij in het begin opgegeven zijn, en zoo als zij voorkomen in de Statica van den Heer J. P. Delprat, moet men de positieve

as der $y'$ aan de linkerzijde van het $x'z'$vlak nemen; wanneer men het $y'z'$vlak uit een punt der positieve $x'$as beschouwt, met het hoofd gekeerd naar de positieve rigting der $z'$as. Nam men de $+ y'$as aan de tegengestelde zijde, dan zouden de formulen ook tegengestelde teekens verkrijgen.

Men weet vooraf, dat voor dit nieuwe stelsel (omdat de resultante en de as van het resulterend koppel in het $x'z'$vlak liggen) de zamenstellende der resultante volgens de as der $y'$, en de koppels loodregt op de assen der $x'$ en der $y'$ verdwijnen; blijvende alleen een koppel loodregt op de as der $z'$, waarvan de as op de positieve as der $z'$ gelegen is.

Wanneer men dus de vergelijkingen (A) en (B) voor dit nieuwe stelsel wil veranderen, moet men stellen
$a = \pm(90° - \phi)$, $b = 90°$, $c = \phi$, $l = 90°$, $m = 90°$, $n = 0$,
$X = R \, Sin. \phi$, $Y = 0$, $Z = R \, Cos. \phi$, $L = 0$, $M = 0$, $N = S$;
indien men dan de hoeken, die P en Q met de nieuwe assen maken, door dezelfde letters met accenten voorstelt, dan worden de vergelijkingen (A):

$$Cos.^2 \alpha' + Cos.^2 \beta' + Cos.^2 \gamma' = 1,$$

$$Sin. \phi \, Cos. \alpha' + Cos. \phi \, Cos. \gamma' = Cos. \theta = - \frac{P}{R},$$

$$Cos. \gamma' = Cos. \psi = - \frac{R \, Cos. \phi}{P},$$

en de vergelijkingen (B):

$$Cos.^2 \alpha'_1 + Cos.^2 \beta'_1 + Cos.^2 \gamma'_1 = 1,$$

$$Sin. \phi \, Cos. \alpha'_1 + Cos. \phi \, Cos. \gamma'_1 = - Sin. \theta = - \frac{\sqrt{(R^2 - P^2)}}{R}.$$

$$Cos. \gamma'_1 = 0.$$

Men vindt hieruit zeer gemakkelijk

$$Cos. \alpha' = - \frac{P^2 - R^2 \, Cos.^2 \phi}{PR \, Sin. \phi},$$

$$Cos. \beta' = \pm \frac{\sqrt{(P^2 - R^2 \, Cos.^2 \phi)}}{P} \cdot \frac{\sqrt{(R^2 - P^2)}}{R \, Sin. \phi},$$

$$Cos. \gamma' = - \frac{R \, Cos. \phi}{P},$$

$$Cos. \alpha'_1 = - \frac{\sqrt{(R^2 - P^2)}}{R \, Sin. \phi},$$

$$Cos.\ \beta'_1 = \mp \frac{\sqrt{(P^2 - R^2\ Cos.^2\ \phi)}}{R\ Sin.\ \phi},$$
$$Cos.\ \gamma'_1 = 0;$$

omdat $Cos.\ \alpha'\ Cos.\ \alpha'_1 + Cos.\ \beta'\ Cos.\ \beta'_1 = 0$ en $Cos\ \alpha'\ Cos.\ \alpha'_1$ positief is, moet $Cos.\ \beta'\ Cos.\ \beta'_1$ negatief zijn; daarom hebben die cosinussen tegengestelde teekens. De overige hoeken hebben slechts eene enkele waarde, zoodat er in het algemeen twee en niet meer dan twee rigtingen voor P en Q bestaan; men zal buitendien gemakkelijk kunnen nagaan, dat als $P < R$ en $P > \pm R\ Cos.\ \phi$ is, de tellers dezer formulen allen kleiner dan hunne noemers worden, en daarom de waarden voor de cosinussen gevonden, bestaanbaar zijn; de aangewezen voorwaarden zijn dus noodzakelijk en voldoende. De kracht Q ligt nu in het $x'y'$vlak of in het vlak van het resulterend koppel, en hare vergelijkingen (4), (5) en (6) veranderen in: $z' = 0$,

$$S + Q\ (x'\ Cos.\ \beta'_1 - y'\ Cos.\ \alpha'_1) = 0,$$

of na herleiding

$$y' = \pm x' \sqrt{\frac{P^2 - R^2\ Cos.^2\ \phi}{R^2 - P^2}} - \frac{RS\ Sin.\ \phi}{R^2 - P^2},$$

en voor de lengte der loodlijn uit den oorsprong op deze lijn getrokken, heeft men

$$d = \frac{S}{\sqrt{(R^2 - P^2)}} = \frac{S}{Q};$$

die loodlijn valt bij den aangenomen stand der assen altijd achter het $x'z'$vlak (dat is aan de zijde der negatieve $y'$as), want stelt men in de vergelijking voor Q, $x' = 0$, dan wordt zij

$$y' = -\frac{RS\ Sin.\ \phi}{R^2 - P^2};$$

deze waarde is altijd negatief, zoodat de rigting van Q de negatieve as der $y'$ doorsnijdt, en dus ook de loodlijn op Q aan die zijde van het $x'z'$vlak valt.

De grootste waarde die voor P zoude kunnen gegeven worden is $P = R$, maar dan wordt $Q = 0$, en er zal geen evenwigt kunnen bestaan, als niet het resulterend koppel S gelijk nul is; de vergelijking van Q gaat ook in dit geval over in $S = 0$, terwijl $Cos.\ \theta = -\frac{P}{R} = -1$ aanwijst, dat P tegengesteld met R moet zijn.

Is daarentegen het resulterend koppel gelijk nul, dan is de rigting der $z'$as en dus ook die der overige assen onbepaald; analytisch wordt dit aangetoond door de formule

$$Cos.\ \phi = \frac{XL + YM + ZN}{RS},$$

die den hoek bepaalt tusschen de resultante en de as van het koppel; zij wordt voor het aangenomen assenstelsel, als nog $N = S = 0$ is,

$$Cos.\ \phi = \frac{0}{0}.$$

Neemt men de $z'$as willekeurig, dan worden de overige hierna geregeld, en de gevondene formulen geven de rigtingen voor P en Q; maar voor alle aangenomen $z'$assen en eene bepaalde waarde van P zijn de hoeken tusschen R en P en R en Q altijd dezelfde en aangewezen door $Cos.\ \theta = -\frac{P}{R}$, $Cos.\ \theta' = -\frac{Q}{R}$, en de vergelijking van Q wordt $x'\ Cos.\ \beta_1 - y'\ Cos.\ \alpha'_1 = 0$. In dit geval snijden dus de krachten P en Q elkander in den oorsprong en zijn hare rigtingen willekeurig, maar gelegen op regte cirkelvormige kegelvlakken, waarvan de resultante de gemeenschappelijke as is en $\theta$ en $\theta'$ de halve tophoeken zijn. Deze kegelvlakken worden beschreven door het parallelogram van krachten, gevormd door R in twee onderling regthoekige krachten, waarvan er eene in grootte bepaald is, te ontbinden, om deszelfs diagonaal te doen rondwentelen. Overigens kan men hier aan P alle mogelijke waarden $< R$ geven.

Voor het algemeene geval, is de kleinste waarde die P kan hebben $P = \pm R\ Cos.\ \phi$, Q wordt dan gelijk aan $R\ Sin.\ \phi$, dat is P en Q zijn dan gelijk aan de zamenstellenden, die men verkrijgt door R in twee onderling regthoekige krachten te ontbinden, waarvan er eene volgens de as van het koppel valt; verder is in dit geval, volgens de formulen,

$Cos.\alpha' = 0, Cos.\beta' = 0, Cos.\gamma' = \mp 1, Cos.\alpha'_1 = -1, Cos.\beta'_1 = 0, Cos.\gamma'_1 = 0,$
of $\alpha' = 90^\circ, \beta' = 90, \gamma' = 180^\circ$ of $0, \alpha'_1 = 180^\circ, \beta'_1 = 90^\circ, \gamma'_1 = 90^\circ,$
en de vergelijking van Q

$$y' = -\frac{S}{R\ Sin.\ \phi} = -\frac{S}{Q};$$

dit alles toont aan dat P in dit geval gerigt is volgens het verlengde van de as des koppels of volgens deze as, naarmate $\phi$ (de hoek tusschen de resultante en die as) scherp of stomp is; dat Q even-

wijdig met de as der $x'$, naar de negatieve rigting dezer as trekkende, achter het $x'z'$vlak ligt, en dat er in dit geval slechts eene rigting voor elk der krachten P en Q is.

Het volgende heeft betrekking op het nieuw aangenomen assenstelsel, doch zijn de accenten bij de letters weggelaten.

De beide rigtingen voor eene bepaalde waarde van P zijn gelegen op regte kegelvlakken, waarvan de as des koppels en de resultante de assen zijn en $\psi$ en $\theta$ de halve tophoeken, terwijl hun gemeenschappelijk toppunt in den oorsprong ligt; de vergelijkingen dezer kegelvlakken zijn,

$$Cos.\ \psi = -\frac{R\ Cos.\ \phi}{P} = \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}},$$

$$Cos.\ \theta = -\frac{P}{R} = \frac{x\ Sin.\ \phi + z\ Cos.\ \phi}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}},$$

door hieruit eene der veranderlijken te elimineren, zou men de vergelijkingen van de projectiën van P op elk der coördinaten vlakken vinden; als men daarentegen de vergelijkingen met elkander vermenigvuldigt, om P te verdrijven, verkrijgt men

$$Cos.\ \phi = \frac{z(x\ Sin.\phi + z\ Cos.\phi)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

voor de vergelijking van het oppervlak, dat alle rigtingen van P bevat, als men deze kracht van hare kleinste waarde tot hare grootste waarde laat aangroeijen; na herleiding geeft dezelve

$$x^2 + y^2 - xz\ Tang.\ \phi = 0,$$

een scheef cirkelvormig kegelvlak aanwijzende, waarvan het $xz$-vlak het centrale vlak en de doorsneden met vlakken evenwijdig aan het $xy$vlak cirkels zijn, die hunne middelpunten hebben op de lijn, gelegen in het $xz$vlak, en waarvan $x = \frac{1}{2}z\ Tang.\ \phi$ de vergelijking is.

De hoek van het centrale vlak is $\phi$ en wordt gevormd door de as van het koppel en de resultante.

Snijdt men den kegel door een vlak evenwijdig met het $xy$vlak, hebbende tot vergelijking

$$z = R\ Cos\ \phi,$$

en dat dus al de uiteinden van P bevat, omdat P $Cos.\ \psi = -$ R $Cos.\phi$ is, dan vindt men voor de vergelijking van de projectie dezer doorsnede

$$x^2 + y^2 + Rx\ Sin.\ \phi = 0;$$

de projectiën van de uiteinden van P zijn dus gelegen in den

omtrek van eenen cirkel, gaande door den oorsprong, die R $Sin. \phi$ of de horizontale zamenstellende van R tot middellijn heeft en waarvan het middelpunt op de negatieve as der $x$ ligt. Voor de lengte der horizontale projectie (of die op het $xy$vlak) van P heeft men

$$P' = P\, Sin.\gamma' = P\sqrt{(1 - Cos.^2\gamma')} = \sqrt{(P^2 - R^2 Cos.^2\phi)};$$

vereenigt men haar uiteinde met het andere uiteinde der middellijn, dan is de lengte dezer koorde K bepaald door

$$K = \sqrt{\{R^2\, Sin.^2\phi - P'^2\}} = \sqrt{(R^2 - P^2)};$$

zij is dus juist gelijk aan Q, en voor den scherpen hoek $k$, dien zij met de as der $x$ maakt, heeft men

$$Cos.\,k = \frac{\sqrt{(R^2 - P^2)}}{R\, Sin.\,\phi} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a).$$

Vergelijkt men dit met de waarde van $Cos.\,\alpha'_1$ dan zal men zien dat zij evenwijdig is met Q; trekt men dus uit den oorsprong eene loodlijn op K, of verlengt men P′ achter het $xz$vlak, en zet men daarop uit de lengte die voor de loodlijn $d$ gevonden is, namelijk

$$d = \frac{S}{Q} = \frac{S}{\sqrt{(R^2 - P^2)}}, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b)$$

dan kan men dit voetpunt der loodlijn als aangrijpingspunt van Q beschouwen, en voor de polaire vergelijking van de lijn, die gevormd wordt door de aangrijpingspunten van Q als men deze kracht met P hare verschillende waarden doet doorloopen, vindt men door ($a$) en ($b$) te vermenigvuldigen, waardoor P verdwijnt,

$$d\, Cos.\,k = \frac{S}{R\, Sin.\,\phi},$$

waarin nu de negatieve as der $y$ de oorsprong der hoeken is. Deze vergelijking wijst eene regte lijn aan, die op den afstand $\frac{S}{R\, Sin.\,\phi}$ achter het $xz$vlak gelegen, evenwijdig is aan de as der $x$. Die afstand is juist gelijk aan den arm van het resulterend koppel, als men deszelfs krachten gelijk neemt aan de horizontale projectie van R.

Wanneer P van $\pm$ R $Cos.\,\phi$ tot R aangroeit, neemt $Cos.\,k$ van 1 tot 0 af, en groeit $d$ van $\frac{S}{R\, Sin.\,\phi}$ tot $\infty$ aan; als dus P het aangewezen kegelvlak beschrijft van de as des koppels naar de resultante, langs de voorzijde van het $xz$vlak, dan verwijdert

zich het aangrijpingspunt van Q in eene regte lijn evenwijdig met de as der $x$, van den oorsprong naar de positieve zijde dier as, en naar de negatieve zijde als P achter het asvlak den kegel doorloopt.

Om zonder behulp van stelkunstige formulen tot dezelfde uitkomsten te geraken, onderstellen wij dat de krachten die op het ligchaam werken (Fig. 9) herleid zijn tot eene enkele resultante, gaande door het gegeven aangrijpingspunt en tot een resulterend koppel; de vraag is dan om deze weder te herleiden tot eene op het gegeven punt werkende kracht P van bepaalde grootte en eene andere Q, die haar regthoekig kruist; want brengt men dan in tegengestelde rigtingen, gelijke krachten, zoo blijft het stelsel in evenwigt.

Zij (in Fig. 9) AR de grootte en rigting der resultante, A het gegeven aangrijpingspunt, en stel dat AP de grootte en onbekende rigting van P zij; door dan R met P te vereenigen, AQ′ evenwijdig aan PR en PQ′ evenwijdig aan AR te trekken, vindt men AQ′ voor de kracht, die noodzakelijk met R in A dient te worden zamengesteld om P in de rigting AP op te leveren. Deze kracht kan men alleen nemen van de krachten van het resulterend koppel, waarvan dan nog eene kracht Q moet overblijven, die P loodregt kruist; maar AQ′ en Q uit de herleiding van een koppel voortkomende, zullen zelven een koppel uitmaken gelijk en evenwijdig aan het eerste; dus is AQ′ $=$ Q en liggen zij beiden in het vlak van het resulterend koppel als men dit door den oorsprong overbrengt; zij zullen verkregen worden door aan den arm van dit koppel, waarvan het moment bepaald is, zekere lengte te geven. Omdat verder P loodregt op Q dus ook op AQ′ moet zijn, heeft men in den regthoekigen driehoek APR

$$AR^2 = AP^2 + PR^2$$

of $\quad R^2 = P^2 + Q^2 \quad$ en $\quad Q = +\sqrt{(R^2 - P^2)}$;

ook vindt men dadelijk, in aanmerking nemende dat de kracht P die het evenwigt moet daarstellen tegengesteld is met AP, en Q tegengesteld met de kracht Q van het koppel, en dus in dezelfde rigting als AQ′ werkt,

$$Cos.\,PAR = Cos.\,(180^\circ - \theta) = \frac{P}{R} \quad \text{of} \quad Cos.\,\theta = -\frac{P}{R},$$

$$Cos.\,RAQ' = Cos.\,\theta' = -\,Sin.\,PAR = -\frac{Q}{R} = -\frac{\sqrt{(R^2 - P^2)}}{R}.$$

Zij verder (Fig. 10) BB′ de projectie van R op het vlak van

het resulterend koppel, AC loodregt op dit vlak, en AD loodregt op BB′ in dit vlak, dan zijn dit de rigtingen der $x'$, $z'$ en $y'$ assen van de voorgaande oplossing; AB is de positieve as der $x'$, AC of deszelfs verlengde de positieve as der $z'$, naarmate de hoek tusschen de resultante en de as van het koppel scherp of stomp is, en AD of deszelfs verlengde de positieve as der $y'$, naarmate AC of deszelfs verlengde de positieve as der $z'$ is.

Maakt men (Fig. 11) achter het $x'z'$vlak $\angle B'AQ'' = \angle B'AQ'$ (van Fig. 10) en $AQ'' = AQ'$, dan zal men door AQ″ met R zamen te stellen een parallelogram verkrijgen gelijk en gelijkvormig met Q′ARP, want omdat R in het $x'z'$vlak ligt, wordt $\angle RAQ'' = \angle RAQ'$ en deszelfs diagonaal is dus ook gelijk P, makende met AB en AC dezelfde hoeken als AP (in Fig. 10) met deze lijnen; er zijn dus twee rigtingen voor de krachten P en Q, doch de loodlijn uit den oorsprong op Q getrokken, blijft steeds achter het $x'z'$vlak gelegen.

Door uit R loodlijnen RF en RE op AB en AC te trekken, worden AF en AE de twee zamenstellenden der resultante; daar RE zoowel als RP evenwijdig is aan het horizontale vlak (wij zullen het $x'y'$vlak het horizontale vlak noemen), zoo is ook het vlak van den driehoek REP horizontaal en EP loodregt op AE; men zal dus voor elke waarde van P hebben

$$AP < AR \text{ en } AP > AE,$$

of

$$P < R \text{ en } P > R \; Cos. \, \phi;$$

tevens heeft men, in den regthoekigen driehoek AEP, $Cos.\, EAP = \frac{AE}{AP}$, of, omdat P tegengesteld met AP moet aangebragt worden, en de hoek, dien deze kracht met de as van het koppel maakt, $\psi$ genoemd is,

$$Cos.\, \psi = - \frac{R \; Cos.\, \phi}{P}.$$

Omdat AQ′ loodregt is op AP en AE, en RP evenwijdig aan AQ′, staat RP loodregt op het vlak EAP, en is $\angle EPR$ regt; de punten E, P en R zijn dus gelegen in eenen horizontalen cirkel, waarvan ER de middellijn is, en de rigtingen van AP (als men die kracht van grootte laat veranderen) vormen alzoo een scheef kegelvlak, waarvan deze cirkel de bazis en de oorsprong der coördinaten-assen de top is. Verder is EP gelijk aan de horizontale projectie van AP, en neemt men in aanmerking dat de

krachten P tegengesteld zijn met de rigtingen van AP, dan zal men zien dat de uiteinden van de horizontale projectiën van P gelegen zijn in den cirkel, beschreven op AG, wordende het punt G bepaald door EG evenwijdig aan AR te trekken; het punt Q′ ligt blijkbaar ook in dezen omtrek, en trekt men dus uit G eene lijn GQ‴ evenwijdig met AQ′, dan is AQ‴ = GQ′ = EP de projectie eener rigting van P, achter het $x'z'$vlak, en men heeft

$$AQ''' = EP = \sqrt{(AP^2 - AE^2)} = \sqrt{(P^2 - R^2\, Cos.^2\, \phi)}.$$

Om het aangrijpingspunt van Q te bepalen, verlenge men, als AC de positieve as der $z'$ is, de lijn AQ‴ tot in H zoodanig, dat AH × Q = S wordt, dan is H het gevraagde aangrijpingspunt en moet Q evenwijdig met AQ′ aangebragt worden; trekt men uit H eene loodlijn HI op AB′, dan zijn de driehoeken AHI en AQ‴G gelijkvormig, en men heeft

$$AG : GQ''' = AH : HI,$$

of $$HI = \frac{GQ''' \times AH}{AG} = \frac{AH \times Q}{AF} = \frac{S}{R\; Sin.\; \phi},$$

zoodat HI voor alle waarden van Q standvastig is; de aangrijpingspunten van die kracht vormen alzoo eene regte lijn, die, op den afstand $\dfrac{S}{R\; Sin.\; \phi}$ achter het $x'z'$vlak, evenwijdig is aan de as der $x'$. Was AC de negatieve as der $z'$, dan zou men, omdat het koppel uit C beschouwd, dan negatief moet zijn, AQ‴ naar de andere zijde moeten verlengen, maar dan is ook AD de negatieve as der $y'$, en dus ligt de lijn der aangrijpingspunten wederom achter het $x'z'$vlak.

Wanneer men P het kegelvlak doet doorloopen van AE naar AR, achter het $x'z'$vlak, dan doorloopt hare tegengestelde AP dit vlak van AE naar AR langs de voorzijde; het punt Q′ beweegt zich in de rigting GQ′A en het punt Q‴ in de rigting AQ‴G, dus het punt H van K naar H; gaat P langs de voorzijde van het $x'z'$vlak, dan beweegt zich H van K naar H′.

Verder zal men uit het voorgaande, door te veronderstellen dat de driehoek EPR op het horizontale vlak geprojecteerd zij, gemakkelijk kunnen opmaken dat de rigting van P bepaald wordt door op de projectie AF van R eenen halven cirkel te beschrijven, en uit haar eene uiteinde F twee cirkelbogen, met Q als straal; de snijpunten zijn alsdan de horizontale projectiën der uiteinden van de beide rigtingen van P, waardoor die rigtingen geheel bepaald zijn.

Om nu nog de hoeken te bepalen, die P en Q met de assen maken, beschrijven wij (Fig. 12) in de vlakken dezer hoeken cirkelbogen, als men dan de Figuren 10 en 12 met elkander vergelijkt, en in aanmerking neemt dat P tegengesteld met AP en Q in de rigting van AQ′ werkt, dan zal men bevinden dat $\angle DAB = 180° - \alpha'$, $\angle DAF = 180° - \beta'$, $\angle DAE = 180° - \gamma'$, $\angle BAG = \alpha'_1$, $\angle FAG = \beta'_1$ en $\angle EAG = \gamma'_1 = 90°$ is, en $\angle DAC = 180° - \theta$, $\angle DAE = 180° - \psi$, $\angle EAC = \phi$ of $180° - \phi$, $\angle GAD = 90°$.

Er is reeds gevonden $Cos.\ EAD = Cos.\ ED = \frac{R\ Cos.\ \phi}{P}$,

dus $$Cos.\ \gamma' = -\frac{R\ Cos.\ \phi}{P}.$$

In den bolvormigen driehoek CGB is $\angle B = 90°$ en

$$Cos.\ CG = Cos.\ BC\ Cos.\ BG,$$

$$Cos.(270° - \theta) = Cos.(90° + \theta) = Cos.(90 - \phi)\ Cos.\ \alpha'_1,$$

of $$Cos.\ \alpha'_1 = -\frac{Sin.\ \theta}{Sin.\ \phi} = -\frac{Q}{R\ Sin.\ \phi} = -\frac{\sqrt{(R^2 - P^2)}}{R\ Sin.\ \phi},$$

en $Sin.\ \alpha'_1 = +\frac{\sqrt{(P^2 - R^2\ Cos.^2\ \phi)}}{R\ Sin.\ \phi}$ (+ omdat $\alpha'_1 < 180°$ en $> 0$ is);

naarmate AQ′ voor of achter het $x'z'$vlak ligt, heeft men

$$Cos.\ \beta'_1 = Cos.\ (\alpha'_1 - 90°) = Sin.\ \alpha'_1,$$

$$Cos.\ \beta'_1 = Cos.\ (270 - \alpha'_1) = -Sin.\ \alpha'_1,$$

dus $$Cos.\ \beta'_1 = \pm Sin.\ \alpha'_1 = \pm\frac{\sqrt{(P^2 - R^2\ Cos.^2\ \phi)}}{R\ Sin.\ \phi};$$

nog heeft men in denzelfden driehoek

$$Sin.\ CGB = \frac{Sin.\ BC}{Sin.\ CG} = \frac{Sin.\ (90° - \phi)}{Sin.(270° - \theta)} = -\frac{Cos.\ \phi}{Cos.\ \theta} = \frac{R\ Cos\ \phi}{P},$$

$$Cos.\ CGB = \pm\frac{\sqrt{(P^2 - R^2\ Cos.^2\ \phi)}}{P},$$

het bovenste of onderste teeken nemende, naarmate AQ′ voor of achter het $x'z'$vlak ligt.

In driehoek DGF is dan DG = 90° en

$$Cos.\ DF = Sin.\ GF\ Cos.\ DGF,$$

$$Cos.(180° - \beta') = Sin.\ \beta'_1\ Cos.\ CGB = -Cos.\ \alpha'_1\ Cos.\ CGB,$$

$$Cos.(180° - \beta') = \pm\frac{\sqrt{(P^2 - R^2\ Cos.^2\ \phi)}}{P}.\frac{\sqrt{(R^2 - P^2)}}{R\ Sin.\ \phi},$$

en $$Cos.\ \beta' = \mp\frac{\sqrt{(P^2 - R^2\ Cos.^2\ \phi)}}{P}.\frac{\sqrt{(R^2 - P^2)}}{R\ Sin.\ \phi},$$

en in driehoek DGB,

$Cos. DB = Sin. BG\, Cos. DGB = Sin. \alpha' ; Cos. CGB = \pm Cos. \beta' ; Cos. CGB,$

$$Cos. (180 - \alpha') = + \frac{P^2 - R^2 \cdot Cos.^2 \phi}{PR\ Sin.\ \phi},$$

$$Cos.\ \alpha' = - \frac{P^2 - R^2\ Cos.^2\ \phi}{PR\ Sin.\ \phi}.$$

De uitkomsten der analytische en meetkunstige beschouwing stemmen alzoo geheel met elkander overeen, en wanneer wij nu alles te zamen vatten wat in den loop der oplossing gevonden is, dan komen wij tot het volgende besluit:

1°. In het algemeen kan een stelsel van krachten in evenwigt worden gehouden, door twee onderling loodregte krachten, waarvan er ééne P in grootte bepaald is en door een gegeven punt gaat, mits deze kracht kleiner is dan de resultante R van het stelsel en niet kleiner dan de projectie van deze resultante op de as van het koppel, dat men verkrijgt als men de resultante in het gegeven aangrijpingspunt overbrengt. De andere kracht Q is altijd kleiner dan de projectie van R op het vlak van het koppel, en R, P en Q vormen eenen regthoekigen driehoek, waarvan R de hypothenusa is.

2°. P kan niet gelijk aan R genomen worden, tenzij het resulterend koppel nul is; dan heeft men ook Q = 0 en is P tegengesteld met R.

Als het resulterend koppel uit zich zelven nul is, dan kan P alle mogelijke waarden kleiner dan R hebben; men behoeft dan slechts R in twee onderling regthoekige krachten te ontbinden, waarvan er eene gelijk aan de gegevene waarde van P is; hierdoor zijn de hoeken tusschen R en P, en R en Q geheel bepaald; maar de rigtingen van P en Q zijn onbepaald in de ruimte en gelegen op regte cirkelvormige kegelvlakken, die men verkrijgt door den regthoek der krachten, om de diagonaal R te laten omwentelen; voor elke rigting van P is er eene overeenkomstige voor Q.

3°. Neemt men P gelijk aan de projectie van R op de as des koppels, dan is zij tegengesteld met deze projectie en hebben P en Q slechts ééne rigting; zijnde Q evenwijdig met het vlak dat door de as van het koppel en de resultante gaat, en van dit vlak op eenen afstand verwijderd, gelijk aan den arm van het resulterend koppel, als men deszelfs krachten gelijk neemt aan de projectie van R op deszelfs vlak.

4°. Geeft men aan P, tusschen de beide genoemde grenzen, alle mogelijke waarden, dan verandert ook hare rigting gedurig, en deze rigtingen vormen een scheef cirkelvormig kegelvlak, dat den hoek tusschen de resultante en de as van het koppel tot centraalvlak heeft. Het aangrijpingspunt is de top van dit kegelvlak en de doorsneden loodregt op het gezegde vlak zijn cirkelvormig.

Q is steeds in het vlak van het resulterend koppel gelegen, als men dit door het gegeven aangrijpingspunt overbrengt; en beschouwt men het voetpunt der loodlijn uit dit punt op hare rigting getrokken als haar aangrijpingspunt, dan vormen de aangrijpingspunten van Q eene lijn evenwijdig aan het vlak van de resultante en de as des koppels, van dit vlak op eenen afstand verwijderd gelijk aan den arm dien het resulterend koppel verkrijgt, als men deszelfs krachten gelijk neemt aan de projectie van R op hetzelfde vlak.

5°. Om te bepalen aan welke zijde deze lijn gelegen is, verbeelde men zich in het gegeven aangrijpingspunt op het vlak van het resulterend koppel te staan, zoodanig, dat men de resultante voor zich ziet en tevens het koppel aldus beschouwd in de positieve rigting van de linker- naar de regterzijde tracht te draaijen, even als de wijzers op een uurwerk, dan zal die lijn steeds vallen aan de linkerzijde van het vlak, dat door de as van het koppel en de resultante gaat.

Wanneer men, op deze wijze geplaatst zijnde, P langs de voorzijde (dat is, langs die zijde, welke met den regterkant van den beschouwer overeenkomt) van het asvlak, het kegelvlak doet doorloopen, dan de as des koppels naar de resultante, dan doorloopt het aangrijpingspunt van Q de gezegde lijn zoodanig, dat hetzelve zich steeds van den beschouwer verwijdert in eene voorwaartsche rigting.

## VRAAGSTUK E.

*Men verlangt, insgelijks zonder en met behulp van stelkunstige formules, de centrale as der momenten van een aantal willekeurig gegevene krachten, die op verschillende punten van een ligchaam werken, te bepalen.*

## OPLOSSING.

1. Wanneer de aangrijpingspunten van eenige krachten onwrikbaar verbonden zijn met eene regte lijn of as, zoodanig, dat het zamenstel, waarop zij werken, eene ronddraaijende beweging om deze as verkrijgt als er geen evenwigt is; en men ontbindt elke kracht in twee andere, waarvan de eerste evenwijdig aan en de tweede loodregt is op de as, dan zullen de zamenstellenden evenwijdig aan de as geenen invloed hebben op de draaijende beweging, maar deze zal alleen afhankelijk zijn van de zamenstellenden loodregt op de as en van hare kortste aftanden tot aan dezelve.

Brengt men door een willekeurig punt der as een loodregt vlak, dan zijn de loodregte zamenstellenden evenwijdig aan dit vlak en in grootte gelijk aan de projectiën der krachten op hetzelve; terwijl de kortste afstanden bepaald zullen worden, door uit het aangenomen punt in dit vlak loodlijnen op de projectiën te trekken.

Het product van de loodregt zamenstellende eener kracht, vermenigvuldigd met haren kortsten afstand tot aan de as, noemt men het *moment* dezer kracht, ten opzigte van die as; de as zelve wordt *as der momenten* genoemd, en door de *som der momenten* verstaat men dan de som van al de dus gevormde producten, mits hierbij de momenten der krachten, die in tegengestelde rigting trachten te draaijen, ook met tegengestelde teekens in rekening brengende.

Als al de krachten in één plat vlak gelegen zijn, wordt onder die bepaling de som van hare momenten gelijk aan het moment van hare resultante; en omgekeerd, het moment eener kracht gelijk aan de som der momenten van hare zamenstellenden.

2. Om de som der momenten van eenige krachten ten opzigte van eene gegevene lijn te bepalen, beschouwen wij die lijn als as der $z$ van een regthoekig assenstelsel, waarvan overigens de rigtingen der andere assen onbepaald worden gelaten. Wij stellen een der krachten voor door P, de hoeken die zij met de assen maakt door $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$, en de coördinaten van haar aangrijpingspunt door $x$, $y$ en $z$, dan is P $Sin. \gamma$ de zamenstellende der kracht loodregt op de as der momenten of evenwijdig aan het $xy$vlak, en de vergelijkingen der rigting van P zijn,

$$\frac{x' - x}{Cos.\ \alpha} = \frac{y' - y}{Cos.\ \beta} = \frac{z' - z}{Cos.\ \gamma},$$

en dus is de vergelijking van hare horizontale projectie,

$$\frac{x' - x}{Cos.\ \alpha} = \frac{y' - y}{Cos.\ \beta} \text{ of } y' - y = \frac{Cos.\ \beta}{Cos.\ \alpha}(x' - x),$$

waarin $x'$, $y'$ en $z'$ de veranderlijke coördinaten voorstellen. De vergelijking van eene lijn, uit den oorsprong loodregt getrokken op die projectie, is alzoo $y' = -\frac{Cos.\ \alpha}{Cos.\ \beta}x'$, en hieruit de lengte dezer loodlijn of $\sqrt{(x'^2 + y'^2)}$ zoekende, vindt men daarvoor

$$\pm\frac{x\ Cos.\ \beta - y\ Cos.\ \alpha}{Sin.\ \gamma};$$

en dus voor het moment van P,

$$P\ Sin.\ \gamma \times \pm\frac{x\ Cos.\ \beta - y\ Cos.\ \alpha}{Sin.\ \gamma} = \pm P(x\ Cos.\ \beta - y\ Cos.\ \alpha).$$

Men kan naar verkiezing een der beide teekens gebruiken, maar men moet dit dan bij het berekenen der overige momenten behouden; kiest men het bovenste, dan volgt daaruit dat men het moment als positief beschouwt, wanneer de factor tusschen de haakjes positief is (en negatief als die factor negatief is). Maar in dat geval wordt de ordinaat van het snijpunt der projectie en de as der $y$, die uit de vergelijking dier projectie bepaald wordt door $x' = 0$ te stellen, en waarvoor men vindt $-\frac{x\ Cos.\ \beta - y\ Cos.\ \alpha}{Cos.\ \alpha}$, negatief als $\alpha$ scherp en positief als $\alpha$ stomp is; dat is, negatief als de horizontale projectie eenen scherpen hoek en positief als zij eenen stompen hoek maakt met de as der $x$. Neemt men nu in aanmerking dat door de hoeken, die eene kracht met de as maakt, altijd die bedoeld worden, welke kleiner dan 180° zijnde, gemeten worden door den boog die de positieve rigting der as met de rigting, volgens welke de kracht trekt, vereenigt, dan zal men hieruit kunnen besluiten, dat door het aangenomen teeken tevens bepaald is, dat een moment positief zal zijn, wanneer de draaijende beweging, die hetzelve aan het $xy$vlak zoude mededeelen, zoodanig is, dat de positieve as der $x$ zich, binnen den hoek tusschen de positieve assen der $x$ en der $y$, zoude verplaatsen.

De som der momenten van al de krachten, ten opzigte van de gegevene as (of hier van de as der $z$), kan nu volgens eene aan-

genomene schrijfwijze voorgesteld worden door

$$\Sigma.P\ (x\ Cos.\ \beta - y\ Cos.\ \alpha).$$

Kortheidshalve zullen wij dezelve het *moment der krachten*, ten opzigte van die as, noemen.

Zonder behulp der analyse geraakt men tot dezelfde uitkomst. Zij daartoe (Fig. 13) M'P' de horizontale projectie van eene kracht P, waarvan M het aangrijpingspunt is en die werkt volgens de rigting in de figuur aangeduid; dan is haar moment ten opzigte van de as der $z$ hetzelfde als dat van M'P', en dus gelijk aan de som der momenten van M'Q' en $M'Q'_1$, die de zamenstellenden van M'P' evenwijdig aan de assen verbeelden. Noemt men nu de momenten positief, als de krachten de + $x$ as zouden draaijen in den hoek tusschen de + $x$ as en de + $y$ as, dan is het moment van $M'Q'_1$ positief en gelijk aan $M'Q'_1 \times BM'$ en dat van M'Q' negatief en gelijk aan $M'Q' \times AM'$; dus is de som dezer momenten

$$M'Q'_1 \times BM' - M'Q' \times AM',$$

of daar $M'Q' = P\ Cos.\ \alpha$, $M'Q'_1 = P\ Cos.\ \beta$, $M'B = x$ en $M'A = y$ is, heeft men, voor het moment van P,

$$P\ (x\ Cos.\ \beta - y\ Cos.\ \alpha).$$

Als een der zamenstellenden van de horizontale projectie, of wel beiden in tegengestelde rigting van de positieve assen werkten; dan zoude eene der uitdrukkingen $P\ Cos.\ \alpha$, $P\ Cos.\ \beta$, of wel beiden negatief zijn, maar dan zoude men ook als dit bij voorbeeld met M'Q' plaats had, voor die kracht moeten stellen $- P\ Cos.\ \alpha$, omdat deze steeds in de formulen als eene positieve grootheid moet voorkomen; onderzoekt men deze gevallen voor de verschillende quadranten en let men behoorlijk op de teekens der coördinaten van de horizontale projectiën der aangrijpingspunten, dan zal men bij de aangenomen rigting voor de positieve momenten altijd de gevondene formulen, met dezelfde teekens, verkrijgen.

Door de assen met elkander te verwisselen, zal men op dezelfde wijze de (som der) momenten ten opzigte van de assen der $x$ en der $y$ kunnen vinden; wij stellen alzoo het moment ten opzigte:

$$\left.\begin{array}{l} \text{van de as der } x,\ \Sigma.P\ (y\ Cos.\ \gamma - z\ Cos.\ \beta) = L, \\ \text{» » » » } y,\ \Sigma.P\ (z\ Cos.\ \alpha - x\ Cos.\ \gamma) = M, \\ \text{» » » » } z,\ \Sigma.P\ (x\ Cos.\ \beta - y\ Cos.\ \alpha) = N; \end{array}\right\} \ldots (A)$$

deze momenten zijn positief als de draaijingen om derzelver assen plaats hebben in de rigtingen $yz$, $zx$ en $xy$, zoodanig, dat wan-

neer men deze draaijende bewegingen uit een punt der positieve assen beschouwt, met het gezigt naar den oorsprong gekeerd, hare rigtingen van de linker- naar de regterzijde gaan, even als de beweging van de wijzers op een uurwerk. Zij kunnen dienen, om het moment ten opzigte van eene andere as te bepalen, die door denzelfden oorsprong gaat, als men de hoeken kent, welke die nieuwe as met elk der oorspronkelijke maakt.

3. Beschouwt men daartoe vooreerst die as als de $x'$as van een nieuw regthoekig stelsel, dat denzelfden oorsprong heeft en bepaald is door de hoeken die deszelfs assen met die van het eerste stelsel maken, en stelt men daartoe de hoeken: die de

$+x'$as maakt met de assen der $+x$, $+y$ en $+z$, $= a, a', a''$,
$+y'$as » » » » » » » » » $= b, b', b''$,
$+z'$as » » » » » » » » » $= c, c' c''$,

dan bestaan er tusschen deze grootheden de volgende betrekkingen:

$$Cos.^2\, a + Cos.^2\, a' + Cos.^2\, a'' = 1, \quad . \; . \; . \; (1)$$
$$Cos.^2\, b + Cos.^2\, b' + Cos.^2\, b'' = 1, \quad . \; . \; . \; (2)$$
$$Cos.^2\, c + Cos.^2\, c' + Cos.^2\, c'' = 1, \quad . \; . \; . \; (3)$$
$$Cos.\, a\, Cos.\, b + Cos.\, a'\, Cos.\, b' + Cos.\, a''\, Cos.\, b'' = 0, \quad . \; (4)$$
$$Cos.\, a\, Cos.\, c + Cos.\, a'\, Cos.\, c' + Cos.\, a''\, Cos.\, c'' = 0, \quad . \; (5)$$
$$Cos.\, b\, Cos.\, c + Cos.\, b'\, Cos.\, c' + Cos.\, b''\, Cos.\, c'' = 0, \quad . \; (6)$$

en ook

$$Cos.^2\, a + Cos.^2\, b + Cos.^2\, c = 1, \quad . \; . \; . \; (7)$$
$$Cos.^2\, a' + Cos.^2\, b' + Cos.^2\, c' = 1, \quad . \; . \; . \; (8)$$
$$Cos.^2\, a'' + Cos.^2\, b'' + Cos.^2\, c'' = 1, \quad . \; . \; . \; (9)$$
$$Cos.\, a\, Cos.\, a' + Cos.\, b\, Cos.\, b' + Cos.\, c\, Cos.\, c' = 0, \quad . \; (10)$$
$$Cos.\, a\, Cos.\, a'' + Cos.\, b\, Cos.\, b'' + Cos.\, c\, Cos.\, c'' = 0, \quad . \; (11)$$
$$Cos.\, a'\, Cos.\, a'' + Cos.\, b'\, Cos.\, b'' + Cos.\, c'\, Cos.\, c'' = 0; \quad . \; (12)$$

de coördinaten $x'$, $y'$ en $z'$ van het aangrijpingspunt van P worden

$$x' = x\, Cos.\, a + y\, Cos.\, a' + z\, Cos.\, a'',$$
$$y' = x\, Cos.\, b + y\, Cos.\, b' + z\, Cos.\, b'',$$
$$z' = x\, Cos.\, c + y\, Cos.\, c' + z\, Cos.\, c'';$$

en de hoeken die P met de nieuwe assen maakt zijn bepaald door

$$Cos.\, \alpha' = Cos.\, a\, Cos.\, \alpha + Cos.\, a'\, Cos.\, \beta + Cos.\, a''\, Cos.\, \gamma,$$
$$Cos.\, \beta' = Cos.\, b\, Cos.\, \alpha + Cos.\, b'\, Cos.\, \beta + Cos.\, b''\, Cos.\, \gamma,$$
$$Cos.\, \gamma' = Cos.\, c\, Cos.\, \alpha + Cos.\, c'\, Cos.\, \beta + Cos.\, c''\, Cos.\, \gamma.$$

Nu is het moment van die kracht, ten opzigte van de (nieuwe) $z'$as, uitgedrukt in de grootheden die tot het nieuwe assenstelsel

behooren, volgens de derde vergelijking (A) in N°. 2,

$$P\,(x'\ Cos.\ \beta' - y'\ Cos.\ \alpha');$$

als men voor $x'$, $y'$, $Cos.\ \alpha'$ en $Cos.\ \beta'$ hunne aangewezen waarden substitueert, dan wordt de factor tusschen de haakjes

$$(x Cos.a + y Cos.a' + z Cos.a'')(Cos.b Cos.\alpha + Cos.b' Cos.\beta + Cos.b'' Cos.\gamma)$$
$$-(x Cos.b + y Cos.b' + z Cos.b'')(Cos.a Cos.\alpha + Cos.a' Cos.\beta + Cos.a'' Cos.\gamma)$$

dat is, na herleiding, als men eenige termen, die elkander vernietigen, weglaat,

$$(x\ Cos.\ \beta - y\ Cos.\ \alpha)\ (Cos.\ a\ Cos.\ b' - Cos.\ a'\ Cos.\ b)$$
$$+(z\ Cos.\ \alpha - x\ Cos.\ \gamma)\ (Cos.\ a''\ Cos.\ b - Cos.\ a\ Cos.\ b'')$$
$$+(y\ Cos.\ \gamma - z\ Cos.\ \beta)\ (Cos.\ a'\ Cos.\ b'' - Cos.\ a''\ Cos.\ b');$$

in den tweeden factor van iederen term komt de letter $c$ niet voor, en men zal dus, wanneer die factoren herleid kunnen worden, tot die herleiding geraken, door uit de vergelijkingen (1), (2), (3), (4), (5) en (6) deze letter te elimineren. Als men vooreerst uit (5) en (6) beurtelings $c$ en $c'$ elimineert, zoo vindt men

$$\frac{Cos.\ a\ Cos.\ b' - Cos.\ a'\ Cos.\ b}{Cos.\ c''} = \frac{Cos.\ a''\ Cos.\ b - Cos.\ a\ Cos.\ b''}{Cos.\ c'} =$$
$$= \frac{Cos.\ a'\ Cos.\ b'' - Cos.\ a''\ Cos.\ b'}{Cos.\ c},$$

waardoor de gezegde factor herleid kan worden tot

$$\frac{Cos.\ a\ Cos.\ b' - Cos.\ a'\ Cos.\ b}{Cos.\ c''} \times \left\{\begin{array}{l}(x\ Cos.\ \beta - y\ Cos.\ \alpha)\ Cos.\ c'' \\ +(z\ Cos.\ \alpha - x\ Cos.\ \gamma)\ Cos.\ c' \\ +(y\ Cos.\ \gamma - z\ Cos.\ \beta)\ Cos.\ c\end{array}\right\}.$$

Substitueert men verder de waarden van $Cos.\ c$ en $Cos.\ c'$ uit (5) en (6) in (3), dan komt er na herleiding

$$Cos.^2 c''\{(Cos.a Cos.b' - Cos.\ a' Cos.b)^2 + (Cos.a' Cos.b'' - Cos.a'' Cos.b')^2$$
$$+(Cos.a'' Cos.b - Cos.a Cos.b'')^2\} = (Cos.a Cos.b' - Cos.\ a' Cos.b)^2,$$

en als men het eerste lid ontwikkelt, dan zal men op (1), (2) en (4) lettende, bevinden, dat de factor van $Cos.^2\ c''$ gelijk 1 is, zoodat men heeft

$$Cos.^2\ c'' = (Cos.\ a\ Cos.\ b' - Cos.\ a'\ Cos.\ b)^2,$$

en vooreerst

$$\frac{Cos.\ a\ Cos.\ b' - Cos.\ a'\ Cos.\ b}{Cos.\ c''} = \pm 1,$$

waardoor de uitdrukking voor het nieuwe moment zoude worden

$$\pm P\{(x\,Cos.\,\beta - y\,Cos.\,\alpha)\,Cos.\,c'' + (z\,Cos.\,\alpha - x\,Cos.\,\gamma)\,Cos.\,c' + (y\,Cos.\,\gamma - z\,Cos.\,\beta)\,Cos.\,c\};$$

neemt men echter in aanmerking dat zij voor $c''=0$ en $c'=c=90^\circ$ wederom het oorspronkelijke moment moet opleveren, omdat deze waarden aanduiden dat de as der $z'$ dezelfde is als die der $z$, dan ziet men dat het bovenste teeken moet genomen worden, en de som der momenten, ten opzigte der nieuwe as, is dan

$$\Sigma.P(x\,Cos.\,\beta - y\,Cos.\,\alpha)\,Cos.\,c'' + \Sigma.P(z\,Cos.\,\alpha - x\,Cos.\,\gamma)\,Cos.\,c' + \Sigma.P(y\,Cos.\,\gamma - z\,Cos.\,\beta)\,Cos.\,c,$$

of, omdat hier $Cos.\,c''$, $Cos.\,c'$ en $Cos.\,c$ standvastig zijn, en volgens (A) van N°. 2,

$$L\,Cos.\,c + M\,Cos.\,c' + N\,Cos.\,c''.$$

Deze uitkomst leert dus, dat het moment ten opzigte van eene lijn gelijk is aan de som der producten van de momenten, ten opzigte van drie regthoekige assen, vermenigvuldigd elk met den cosinus van den hoek, dien deze lijn met de assen van die momenten maakt.

Noemt men de momenten, ten opzigte der $x'$, $y'$ en $z'$assen $L'$, $M'$ en $N'$, dan zal men hebben,

$$\left.\begin{aligned} L' &= L\,Cos.\,a + M\,Cos.\,a' + N\,Cos.\,a'' \\ M' &= L\,Cos.\,b + M\,Cos.\,b' + N\,Cos.\,b'' \\ N' &= L\,Cos.\,c + M\,Cos.\,c' + N\,Cos.\,c'' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (B)$$

en omgekeerd,

$$\left.\begin{aligned} L &= L'\,Cos.\,a + M'\,Cos.\,b + N'\,Cos.\,c \\ M &= L'\,Cos.\,a' + M'\,Cos.\,b' + N'\,Cos.\,c' \\ N &= L'\,Cos.\,a'' + M'\,Cos.\,b'' + N'\,Cos.\,c'' \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (B')$$

4. Door de som der vierkanten van de beide leden te nemen, vindt men uit (B) en uit (B'), lettende op de vergelijkingen (1) tot (12) van N°. 3,

$$L^2 + M^2 + N^2 = L'^2 + M'^2 + N'^2,$$

de som der vierkanten van de momenten, ten opzigte van drie regthoekige assen, is dus voor alle stelsels, die denzelfden oorsprong hebben, eene standvastige grootheid, die gevonden wordt door de som van die vierkanten voor een dezer stelsels te berekenen; stelt men alzoo,

$$L^2 + M^2 + N^2 = G^2,$$

dan kan de vergelijking

$$L'^2 + M'^2 + N'^2 = G^2,$$

dienen om de as te bepalen, waarvoor de som der momenten een *maximum* is; want stellende dat dit de $z'$as zij, dan heeft men

$$N'^2 = G^2 - (L'^2 + M'^2),$$

en dus zal deze waarde een maximum zijn, als die $z'$as zoodanig genomen wordt, dat men heeft $L'^2 + M'^2 = 0$, waartoe noodzakelijk vereischt wordt $L' = 0$ en $M' = 0$; de vergelijkingen (C) geven, voor deze waarden,

$$L = N' \, Cos.\, c = G \, Cos.\, c,$$
$$M = N' \, Cos.\, c' = G \, Cos.\, c',$$
$$N = N' \, Cos.\, c'' = G \, Cos.\, c'';$$

dus voor de hoeken die de as van het *moment-maximum* met de oorspronkelijke assen maakt

$$Cos.\, c = \frac{L}{G}, \; Cos.\, c' = \frac{M}{G}, \; Cos.\, c'' = \frac{N}{G}.$$

Met behulp van de leerwijze der maxima en minima, verkrijgt men dezelfde uitkomsten; om deze leerwijze toe te passen moet men de uitdrukking

$$L \, Cos.\, c + M \, Cos.\, c' + N \, Cos.\, c'',$$

die in het algemeen het moment voorstelt, ten opzigte van eene as, die hoeken $c$, $c'$ en $c''$ met de coördinaten-assen maakt, beschouwen als eene functie van die drie veranderlijke grootheden, waarvan er echter slechts twee onafhankelijk zijn, omdat men nog heeft

$$Cos.^2\, c + Cos.^2\, c' + Cos.^2\, c'' = 1.$$

Men verkrijgt dan, door de functie en deze vergelijking te differentiëren en het differentiaal-quotiënt der eerste gelijk nul te stellen,

$$L \, Sin.\, c \, \delta . c + M \, Sin.\, c' \, \delta . c' + N \, Sin.\, c'' \, \delta . c'' = 0,$$

$$Cos.\, c \, Sin.\, c \, \delta . c + Cos.\, c' \, Sin.\, c' \, \delta . c' + Cos.\, c'' \, Sin.\, c'' \, \delta . c'' = 0;$$

en hieruit $\delta . c''$ eliminerende

$$Sin.c \left\{ L Cos.c'' - N Cos.c \right\} \delta . c + Sin.c' \left\{ M Cos.c'' - N Cos.c' \right\} \delta . c' = 0.$$

De coëfficiënten van $\delta . c$ en $\delta . c'$ gelijk nul stellende, zoo geven alleen de vergelijkingen

$$L \, Cos.\, c'' - N \, Cos.\, c = 0 \text{ en } M \, Cos.\, c'' - N \, Cos.\, c' = 0$$

bestaanbare waarden voor de hoeken; men heeft dan

$$Cos.\, c = \frac{L}{N} \, Cos.\, c'', \quad Cos.\, c' = \frac{M}{N} \, Cos.\, c'',$$

dus $$Cos.^2\, c'' \left\{1 + \frac{L^2}{N^2} + \frac{M^2}{N^2}\right\} = 1,$$

waaruit volgt

$$Cos.\, c'' = \frac{N}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}},\quad Cos.\, c' = \frac{M}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}},$$

$$Cos.\, c = \frac{L}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}},$$

en tevens volgt hieruit voor het maximum

$$L\, Cos.\, c + M\, Cos.\, c' + N\, Cos.\, c'' = \frac{L^2 + M^2 + N^2}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}$$

$$= \sqrt{\{L^2 + M^2 + N^2\}} = G.$$

Wanneer men dus, van den oorsprong af, op elk der coördinaten-assen stukken uitzet, evenredig aan de momenten, ten opzigte van elk van die assen, en naar de positieve of negatieve zijde, naarmate die momenten positief of negatief zijn, dan zal de diagonaal van het parallelopipedum, dat deze afstanden tot ribben heeft, de rigting der as zijn waarvoor het moment een maximum is; tevens zal deze diagonaal de grootte van dit moment voorstellen, terwijl hetzelve in de positieve rigting tracht te draaijen, als men die beweging uit het einde dier diagonaal beschouwt.

5. Het moment, ten opzigte van eenige as, die met de coördinaten-assen hoeken $p$, $q$ en $r$ maakt, is dus

$$L\ Cos.\ p + M\ Cos.\ q + N\ Cos.\ r,$$

of $$G\left\{\frac{L}{G} Cos.\, p + \frac{M}{G} Cos.\, q + \frac{N}{G} Cos.\, r\right\}$$

$$= G\left\{Cos.\, c\, Cos.\, p + Cos.\, c'\, Cos.\, q + Cos.\, c''\, Cos.\, r\right\},$$

dat is, den hoek tusschen deze as en die van het moment-maximum, door $\theta$ voorstellende,

$$G\ Cos.\ \theta.$$

De momenten, ten opzigte van assen, die denzelfden hoek maken met de as van het moment-maximum, zijn dus even groot; wanneer men alzoo deze laatste as beschouwt als de gemeenschappelijke as van een oneindig aantal regte kegelvlakken, die allen den oorsprong tot top hebben, dan zijn de momenten dezelfde voor alle beschrijvende lijnen, die tot hetzelfde kegelvlak behooren, en deze momenten veranderen van het eene kegelvlak tot het andere, in dezelfde reden als de cosinussen der halve tophoeken.

Voor eene as, loodregt op die van het moment-maximum, is het moment $= (G\ Cos.\ \theta) = G\ Cos.\ \frac{1}{2}\pi = 0$.

6. Om het moment te bepalen, ten opzigte van eene as, die niet door den oorsprong gaat, stellen wij de coördinaten van eenig punt dier as $x_1$, $y_1$ en $z_1$, en brengen vooreerst door dit punt drie assen evenwijdig aan de coördinaten-assen; om dan de momenten, ten opzigte van die assen, te verkrijgen, behoeft men alleen in L, M en N de coördinaten der aangrijpingspunten met $x_1$, $y_1$ en $z_1$ te verminderen; hierdoor verkrijgt men, als men de gezegde momenten door $L_1$, $M_1$ en $N_1$ voorstelt,

$$L_1 = \Sigma.P\left\{(y-y_1)\,Cos.\gamma-(z-z_1)\,Cos.\beta\right\}$$
$$= \Sigma.P\left\{y\,Cos.\gamma - z\,Cos.\beta\right\} - y_1\,\Sigma.P\,Cos.\gamma + z_1\,\Sigma.P\,Cos.\beta,$$
$$M_1 = \Sigma.P\left\{(z-z_1)\,Cos.\alpha-(x-x_1)\,Cos.\gamma\right\}$$
$$= \Sigma.P\left\{z\,Cos.\alpha - x\,Cos.\gamma\right\} - z_1\,\Sigma.P\,Cos.\alpha + x_1\,\Sigma.P\,Cos.\gamma,$$
$$N_1 = \Sigma.P\left\{(x-x_1)\,Cos.\beta-(y-y_1)\,Cos.\alpha\right\}$$
$$= \Sigma.P\left\{x\,Cos.\beta - y\,Cos.\alpha\right\} - x_1\,\Sigma.P\,Cos.\beta + y_1\,\Sigma.P\,Cos.\alpha.$$

Maar $\Sigma.P\ Cos.\ \alpha$, $\Sigma.P\ Cos.\ \beta$, $\Sigma.P\ Cos.\ \gamma$ zijn de sommen der zamenstellende krachten, die men verkrijgt door iedere kracht in drie andere evenwijdig aan de coördinaten-assen te ontbinden; als men deze sommen (zoo als gewoonlijk) door X, Y en Z voorstelt, dan heeft men:

$$\left.\begin{array}{l} L_1 = L - y_1 Z + z_1 Y, \\ M_1 = M - z_1 X + x_1 Z, \\ N_1 = N - x_1 Y + y_1 X. \end{array}\right\} \ldots\ldots (C)$$

waaruit men vooreerst ziet:

1°. dat $L_1$, $M_1$ en $N_1$ standvastig en gelijk aan L, M en N blijven, voor elk punt der ruimte, als men heeft $X=0, Y=0, Z=0$, dat is, als de krachten van het stelsel herleid kunnen worden tot gelijke doch tegengestelde en evenwijdige krachten.

2°. dat $L_1$, $M_1$ en $N_1$ standvastig en gelijk aan L, M en N zullen blijven, voor alle punten der ruimte, die voldoen aan de vergelijkingen

$$\begin{array}{l} y_1\ Z - z_1\ Y = 0, \\ z_1\ X - x_1\ Z = 0, \\ x_1\ Y - y_1\ X = 0; \end{array}$$

de derde dezer vergelijkingen is van de twee overigen afhankelijk, en klaarblijkelijk behooren zij tot de resultante van drie krachten

$$X = \Sigma.P\, Cos.\,\alpha,\quad Y = \Sigma.P\, Cos.\,\beta,\quad Z = \Sigma.P\, Cos.\,\gamma,$$

gerigt volgens de drie coördinaten-assen.

Het moment-maximum en de rigting van deszelfs as veranderen dus niet als men den oorsprong over de rigting van die resultante verplaatst. En

3°. dat $L_1$, $M_1$ en $N_1$ dezelfde waarden zullen verkrijgen voor alle punten die voldoen aan

$$\begin{aligned} y_1 Z - z_1 Y &= C(\text{onstant}), \\ z_1 X - x_1 Z &= C_1, \\ x_1 Y - y_1 X &= C_2, \end{aligned}$$

waarin een der standvastigen van de twee overigen afhankelijk is. Die vergelijkingen wijzen dan eene regte lijn aan, evenwijdig met de gezegde resultante, zoodat de momenten-maxima eene zelfde waarde, en evenwijdige assen zullen hebben, voor al de als oorsprong gekozene punten eener lijn, evenwijdig aan die resultante.

7. Verder vindt men, uit de vergelijkingen (C), voor het moment-maximum

$$G_1^2 = L_1^2 + M_1^2 + N_1^2 =$$
$$(L - y_1 Z + z_1 Y)^2 + (M - z_1 X + x_1 Z)^2 + (N - x_1 Y + y_1 X)^2;$$

de termen tusschen de haakjes zullen, wanneer $x_1$, $y_1$ en $z_1$ steeds aangroeijen, van den positieven tot den negatieven toestand, of omgekeerd kunnen overgaan, uithoofde van het negatieve teeken dat zij bevatten; zij zullen dus, wat hunne getallenwaarden aangaat, eerst kunnen aangroeijen en daarna afnemen, of omgekeerd; daar $G_1^2$ uit de som van hunne vierkanten bestaat, zal er voor $G_1^2$ wel een minimum maar geen maximum kunnen zijn. Om dat minimum te vinden, stelle men de differentiaal-quotiënten van $G_1^2$, ten opzigte van elk der onafhankelijke veranderlijken $(x_1, y_1, z_1)$, elk in het bijzonder gelijk nul, waardoor men verkrijgt

$$\left.\begin{aligned} (M - z_1 X + x_1 Z)\, Z - (N - x_1 Y + y_1 X)\, Y &= 0, \\ -(L - y_1 Z + z_1 Y)\, Z + (N - x_1 Y + y_1 X)\, X &= 0, \\ (L - y_1 Z + z_1 Y)\, Y - (M - z_1 X + x_1 Z)\, X &= 0, \end{aligned}\right\} \text{. (D)}$$

voor de vergelijkingen, waaruit de coördinaten $x_1$, $y_1$ en $z_1$ gevonden worden van het punt, waarin men den oorsprong moet overbrengen, opdat het moment-maximum, voor de as die door dit punt gaat, een *minimum* zij. Maar de derde dezer vergelijkingen

is van de twee overige afhankelijk; want vermenigvuldigt men de 1° met X, de 2° met Y en de 3° met Z, dan geeft de som der producten eene identiteit; zij behooren dus tot eene regte lijn; en voor elk punt dezer lijn zal het moment-maximum, onder al de momenten-maxima voor de verschillende punten der ruimte, een minimum zijn, dat voor elk punt der lijn dezelfde waarde zal hebben. Hieruit kan men ingevolge de derde aanmerking in N°. 6 reeds opmaken, dat deze lijn evenwijdig zal zijn aan de aldaar aangewezen resultante; waarvan de grootte R bepaald is door $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$; maar men zal dit ook vinden, als men de vergelijkingen (D) verder herleid; de derde geeft na verschikking van hare termen

$$z_1(X^2+Y^2) - y_1YZ - x_1XZ + YL - XM = 0,$$

of $$z_1(R^2 - Z^2) - y_1YZ - x_1XZ + YL - XM = 0,$$

dat is $$z_1R^2 = Z(x_1X + y_1Y + z_1Z) + XM - YL;$$

en zoo geven de beide overigen

$$y_1R^2 = Y(x_1X + y_1Y + z_1Z) + ZL - XN,$$

$$x_1R^2 = X(x_1X + y_1Y + z_1Z) + YN - ZM;$$

hieruit vindt men door beurtelijks $(x_1X + y_1Y + z_1Z)$ tusschen twee derzelve te elimineeren,

$$\left.\begin{aligned} L - y_1Z + z_1Y &= \frac{XL+YM+ZN}{R^2}X,\\ M - z_1X + x_1Z &= \frac{XL+YM+ZN}{R^2}Y,\\ N - x_1Y + y_1X &= \frac{XL+YM+ZN}{R^2}Z, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (E)$$

voor de herleide vergelijkingen der bedoelde lijn.

Men kan dezelve onder de volgende vormen brengen:

$$\frac{x_1}{X} = \frac{z_1}{Z} + l,\quad \frac{x_1}{X} = \frac{y_1}{Y} + m,\quad \frac{y_1}{Y} = \frac{z_1}{Z} + n,$$

als $l$, $m$ en $n$ de som der standvastige termen in elke vergelijking voorstellen; vergelijkt men haar nu met de vergelijkingen van eene lijn, die hoeken $p$, $q$ en $r$ met de assen maakt, en die geschreven kunnen worden als volgt,

$$\frac{x_1}{Cos.\,p} = \frac{z_1}{Cos.\,r} + l,\quad \frac{x_1}{Cos.\,p} = \frac{y_1}{Cos.\,q} + m,\quad \frac{y_1}{Cos.\,q} = \frac{z_1}{Cos.\,r} + n,$$

dan heeft men

$$Cos.\,p : Cos.\,q : Cos.\,r = X : Y : Z,$$

en dus, als A eenen onbekenden standvastigen factor voorstelt,

$$Cos.\, p = AX,\ Cos.\, q = AY,\ Cos.\, r = AZ,$$

waaruit volgt

$$A^2(X^2 + Y^2 + Z^2) = 1,\ \text{of}\ AR^2 = 1,\ \text{dus}\ A = \frac{1}{R},$$

en $$Cos.\, p = \frac{X}{R},\ Cos.\, q = \frac{Y}{R},\ Cos.\, r = \frac{Z}{R};$$

de hoeken $p$, $q$ en $r$ zijn dus dezelfde als die welke de resultante met de assen maakt, waaruit blijkt dat de gezegde lijn evenwijdig is aan de resultante.

Als men verder het kleinste onder de momenten-maxima door K voorstelt, dan vindt men met behulp van de vergelijkingen (E), omdat

$$K^2 = (L - y_1Z + z_1Y)^2 + (M - z_1X + x_1Z)^2 + (N - x_1Y + y_1X)^2$$

is, voor hetzelve

$$K = \frac{XL + YM + ZN}{R},$$

en de hoeken die dezelfde as met de assen maakt, zijn bepaald door

$$Cos.\, \alpha_1 = \frac{L_1}{K} = \frac{L - y_1Z + z_1Y}{K} = \frac{X}{R},$$

$$Cos.\, \beta_1 = \frac{Y}{R}, \qquad Cos.\, \gamma_1 = \frac{Z}{R};$$

deze as is dus eveneens evenwijdig aan de resultante, zoodat uit dit alles volgt, dat de lijn, die de punten bevat, waarvoor de momenten-maxima het kleinste zijn, tevens de gemeenschappelijke as dezer momenten is.

Deze as, hierdoor op zulk eene merkwaardige wijze van de overige die haar omringen onderscheiden, wordt door POINSOT *centrale as der momenten* genoemd, en deze benaming zal nog meer gewettigd worden, als wij de verdere eigenschappen van die as onderzoeken.

8. Daartoe beschouwen wij dezelve als as der $z$ van een nieuw regthoekig stelsel; omdat zij evenwijdig is aan de resultante, heeft men in dit geval voor de zamenstellenden der resultante

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = R,$$

en omdat de hoeken, die de as van het moment-maximum nu met de assen maakt, zijn

$$c = 90^\circ,\ c' = 90^\circ\ \text{en}\ c'' = 0,$$

is nog, (zie N°. 4 en N°. 5)

$$L = 0,\ M = 0,\ N = G = K.$$

Zoekt men nu het moment-maximum voor eenige as, gaande door een punt, waarvan $a$, $b$ en $c$ de coördinaten zijn, dan heeft men vooreerst uit (C) N°. 6, voor de aangewezene waarden,

$$L_1 = -bZ = -bR,$$
$$M_1 = +aZ = +aR,$$
$$N_1 = N = K,$$

waarmede men voor dat moment vindt

$$G_1^2 = \sqrt{(L_1^2 + M_1^2 + N_1^2)} = K^2 + (a^2 + b^2)R^2;$$

hetzelve is dus onafhankelijk van de ordinaat $c$, dat is, standvastig voor alle punten van eene lijn, die evenwijdig loopt aan de as der $z$, en alleen afhankelijk van den afstand $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ dezer lijn tot aan die as.

Neemt men dus $a^2 + b^2 = \rho^2$ standvastig, dan zal voor elk punt van het regte cilindervlak, waarvan de as der $z$ de as en $\rho = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ de straal is, het maximum-moment dezelfde waarde hebben.

Dus is de lijn, die men centrale as der momenten genoemd heeft, de gemeenschappelijke as van een oneindig aantal regte cirkelvormige cilindervlakken, zoodanig, dat voor alle punten op hetzelfde cilindervlak gelegen, de momenten-maxima even groot zijn, en dat dezelve kleiner worden naarmate de stralen der cilinders afnemen, terwijl zij een minimum zijn voor de as zelve.

Neemt men een punt op een der cilindervlakken, waarvan $\rho = \sqrt{(a^2 + b^2)}$ de straal is, dan heeft men voor de hoeken, die de as van het moment-maximum, gaande door dit punt, met de assen maakt:

$$Cos.\ c = \left(\frac{L_1}{G_1}\right) = -\frac{bR}{\sqrt{\{K^2 + (a^2 + b^2)R^2\}}},$$
$$Cos.\ c' = \left(\frac{M_1}{G_1}\right) = \frac{aR}{\sqrt{(K^2 + (a^2 + b^2)R^2)}},$$
$$Cos.\ c'' = \left(\frac{N_1}{G_1}\right) = \frac{K}{\sqrt{(K^2 + (a^2 + b^2)R^2)}};$$

voor dezelfde waarden van $a$ en $b$ zijn deze hoeken standvastig, zoodat de assen der momenten-maxima, gaande door de verschillende punten van eenige beschrijvende lijn op een cilindervlak, onderling evenwijdig en dus in één plat vlak gelegen zijn.

Voor de vergelijking van een dezer assen heeft men als $a$, $b$ en $c$ de coördinaten zijn van het punt op het cilindervlak,

$$x - a = \frac{Cos.\ c}{Cos.\ c''}(z - c) = -\frac{bR}{K}(z - c);$$

$$y - b = \frac{Cos.\ c'}{Cos.\ c''}(z - c) = \frac{aR}{K}(z - c),$$

$$x - a = \frac{Cos.\ c}{Cos.\ c'}(y - b) = -\frac{b}{a}(y - b);$$

als men uit deze vergelijkingen, met behulp van $a^2 + b^2 = \rho^2$, $a$ en $b$ verdrijft, dan zal men eene vergelijking verkrijgen tusschen $x$, $y$ en $z$, die tot alle assen behoort, welke door de verschillende punten van eenen cirkelomtrek gaan, wiens vlak loodregt is op de centrale as der momenten, of evenwijdig aan het $xy$vlak, en die dus de vergelijking zal zijn van het oppervlak dat door deze assen gevormd wordt.

Telt men daartoe de vierkanten van de twee eerste vergelijkingen bij elkander, dan heeft men

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (a^2 + b^2)\frac{R^2}{K^2}(z-c)^2,$$

of in aanmerking nemende dat $a^2 + b^2 = \rho^2$ is en dat uit de derde vergelijking volgt $ax + by = \rho^2$

$$x^2 + y^2 - \rho^2 = \frac{\rho^2 R^2}{K^2}(z - c)^2;$$

of

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} - \frac{R^2}{K^2}(z - c)^2 = 1,$$

welke vergelijking eene omwentelingshyperboloïde aanwijst, voortgebragt door de hyperbool, waarvan $\rho$ de bestaanbare as is, om de onbestaanbare $\frac{K}{R}$ te doen rondwentelen.

Wanneer $c$ verandert, dat is, wanneer men den cirkel over het cilindervlak evenwijdig aan zichzelven verplaatst, blijven de omwentelingshyperboloïden gelijk en gelijkvormig, maar zij worden met dien cirkel verplaatst, zoodanig dat deze altijd de *keel* dier oppervlakken blijft.

9. Bij de meetkunstige beschouwing van de bijzonderheden omtrent de momenten, veronderstellen wij dat de theorie der koppels bekend zij; men vindt dezelve breedvoerig ontwikkeld in de

*Elemens de Statique*, par L. POINSOT en in de *Statica* van den Heer J. P. DELPRAT.

Wanneer eenige krachten op een zamenstel van punten werken, dan worden zij herleid tot drie krachten X, Y en Z, volgens zekere aangenomen coördinaten-assen, en tot drie koppels loodregt op elk dezer assen; is b. v. P eene kracht, waarvan $x$, $y$ en $z$ de coördinaten van het aangrijpingspunt en $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$ de hoeken zijn, die zij met de assen maakt, dan zijn

$$P\,(y\ Cos.\ \gamma - z\ Cos.\ \beta),$$
$$P\,(z\ Cos.\ \alpha - x\ Cos.\ \gamma),$$
$$P\,(x\ Cos.\ \beta - y\ Cos.\ \alpha)$$

de drie koppels, loodregt op de assen, die deze kracht oplevert; en de som van al de koppels, loodregt op de as der $x$, is dus

$$L = \Sigma.P\,(y\ Cos.\ \gamma - z\ Cos.\ \beta),$$

zijnde dit dezelfde uitdrukking als die, welke gevonden is voor het moment van die krachten, ten opzigte van deze as.

Bij de zamenstelling der koppels volgt men denzelfden weg als bij de zamenstelling der krachten, stellende daartoe de koppels voor, door aan dezelve evenredige lijnen, waarvan de rigtingen loodregt zijn op de vlakken der koppels, en zoodanig, dat zij uit het uiteinde dezer lijnen beschouwd zijnde, allen in dezelfde rigting trachten te draaijen. Deze lijnen, wier rigtingen overeenkomen met de rigtingen van de assen der momenten, noemt men de assen dezer koppels en op deze assen wordt nu de theorie van de zamenstelling der krachten toegepast.

10. Wil men nu het moment bepalen voor eenige as, die door den oorsprong van de coördinaten-assen gaat, dan zoekt men de som der koppels loodregt op die as, door eerst de koppels loodregt op de coördinaten-assen te bepalen, deze tot een resulterend koppel te herleiden, en dit dan wederom te ontbinden in een koppel, loodregt op de gegevene as, en in een koppel, waarvan het vlak door die as gaat. Als men van den oorsprong af op de coördinaten-assen stukken uitzet, evenredig aan de grootheden L, M en N, en in zulk eene rigting, dat de koppels, in den oorsprong gesteld en uit het uiteinde dezer lijnen beschouwd, in dezelfde rigtingen trachten te draaijen, dan geeft de diagonaal van het parallelopipedum, dat deze lijnen tot ribben heeft, de rigting der as en de grootte van het resulterend koppel, en dit koppel

komt overeen met het moment-maximum $G = \sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}$; ontbindt men hetzelve in een koppel, loodregt op eene lijn, die eenen hoek $\theta$ met deszelfs as maakt, en in een koppel, waarvan het vlak door die as gaat, dan is het eerstgenoemde gelijk aan $G\ Cos.\ \theta$ en onafhankelijk van de rigting van deszelfs as, zoo lang $\theta$ standvastig blijft. Noemt men de hoeken, die de as van het koppel G met de assen maakt, $c$, $c'$ en $c''$, zoodat men heeft

$$Cos.\ c = \frac{L}{G},\quad Cos.\ c' = \frac{M}{G},\quad Cos.\ c'' = \frac{N}{G},$$

en die, welke de gegevene lijn met de assen maakt, $p$, $q$ en $r$, dan is $Cos.\theta = Cos.c\,Cos.p + Cos.c'\,Cos.q + Cos.c''\,Cos.r$, dus $G\,Cos.\theta = G\,Cos.c\,Cos.p + G\,Cos.c'\,Cos.q + G\,Cos.c''\,Cos.r$, of $G\ Cos.\ \theta = L\ Cos.\ p + M\ Cos.\ q + N\ Cos.\ r$; dit komt overeen met het in n°. 3 en n°. 5 gevondene.

11. Wil men verder het moment-maximum en deszelfs as bepalen voor een willekeurig gegeven punt, dan brengt men de resultante van het stelsel, $R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$, in het gegeven punt over, door aldaar twee gelijke doch tegengestelde krachten aan te brengen; er ontstaat dan een nieuw koppel, waarvan de resultante de kracht, en de afstand, waarop men haar verplaatst heeft, de arm is; dit koppel met het reeds bestaande zamenstellende, verkrijgt men het resulterend koppel, overeenkomende met het moment-maximum voor dat punt, en de door het bedoelde punt gaande as van het koppel is tevens de rigting der as van het moment.

Als men heeft $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, dan is ook $R = 0$ en dus het bij te voegen koppel nul, omdat deszelfs krachten gelijk nul zijn. Is R niet gelijk nul, maar verplaatst men den oorsprong op de rigting van R, dan is het bijgevoegde koppel nul, omdat deszelfs arm verdwijnt; in deze gevallen verandert het moment-maximum niet, zoo als ook in n°. 6 afgeleid is uit de vergelijkingen (C). Ook volgt hieruit, dat het nieuwe koppel of het moment-maximum hetzelfde blijft voor alle punten, die gelegen zijn op eene lijn evenwijdig aan de resultante.

12. Veronderstel nu dat AG (Fig. 14) de grootte en de rigting der as zij van het resulterend koppel, zoodanig, dat dit uit G beschouwd wordende, in de positieve rigting draait, en zij AR de rigting en grootte der resultante R; door dezelve in het punt B,

of in eenig punt der lijn CD door B evenwijdig aan hare rigting getrokken, over te brengen, moet men het koppel G zamenstellen met dat, waarvan R de kracht en AE loodregt op AR en CD de arm is; brengt men daartoe door AE een vlak EAF loodregt op AR of op het vlak RAEC van het koppel (R, AE), en trekt men in dit vlak, AF loodregt op AE, dan is AF de rigting der as van het laatste koppel, waarvan de grootte uitgedrukt wordt door AE × R; herleidt men dus ook het koppel G tot de kracht R, waardoor AG gelijk aan den arm van dit koppel wordt, dan kan men, om de grootte van het koppel (R, AE) voor te stellen, AF = AE nemen; en voltooit men dan het parallelogram op AG en AF, zoo is de diagonaal AH, voor elk punt van CD, de grootte van het moment-maximum; terwijl AH tevens evenwijdig aan de as en gelijk aan den arm van dat moment-maximum is.

Laat men AF standvastig, dat is, verplaatst men de resultante op denzelfden afstand evenwijdig aan zich zelve, dan zal AH des te kleiner worden, naarmate ∠ GAF grooter is; laat men het vlak RAEC om RA rondwentelen, dan zal AF, steeds loodregt op dit vlak blijvende, eenen cirkel doorloopen, en ∠GAF zal het grootste zijn als AF op AF′, dat is, op het verlengde der projectie AI van AG op het vlak EAF valt; want dan is ∠GAI de hoek dien AG met dit vlak maakt en dus het minimum van ∠GAF, terwijl daardoor ∠GAF′ = 180° — ∠GAI het maximum van ∠GAF wordt.

AE is in den stand AE′ loodregt op AI en op het vlak van AR en AG gekomen; wanneer men alzoo de resultante op gelijke afstanden maar in willekeurige rigtingen AE′ verplaatst, dan zal na die verplaatsing het resulterend koppel of het moment-maximum het kleinste zijn, als die rigting AE′ loodregt is op het vlak van de resultante en van de as van het reeds bestaande resulterend koppel.

Neemt men nu AF′ = AF, trekt men uit G eene lijn evenwijdig aan AF′ en uit F′ de lijn F′K evenwijdig aan AG, dan is AK de grootte van dit kleinste maximum en van deszelfs arm, voor denzelfden afstand AE′; voor alle waarden van AF′ = AE′ blijft de evenwijdige lijn door G getrokken dezelfde, alleen verplaatst zich F′K; men zal dus AF′ zoodanig kunnen kiezen, dat het punt K op de rigting AR valt; trekkende daartoe eenvoudig uit het snijpunt L de lijn LM evenwijdig aan AG, dan is AM die waarde

van AF'; en dan is AL de grootte van het kleinste maximum, namelijk, AL is de lengte van den arm en R de kracht van hetzelve; maar AL. de kortste afstand zijnde van A tot GK, is dus tevens het minimum onder al de kleinste maxima, en men behoeft nu slechts, op de lijn AE', AN = AM te nemen, om het punt N te bepalen, waardoor de resultante verplaatst moet worden.

13. Men verkrijgt alzoo het kleinste resulterend koppel, overeenkomende met het moment-maximum-minimum, als men de resultante zoodanig verplaatst, dat na die verplaatsing de as van het koppel op de rigting der resultante valt, of, dat de resultante loodregt staat op het vlak van het koppel.

Den hoek tusschen AR en AG $\phi$ noemende, heeft men

$$Cos.\ \phi = \frac{XL + YM + ZN}{RG},$$

en in de figuur is $AL = AG\ Cos.\ \phi$,
of AL, zoo als in de voorgaande beschouwingen door K voorstellende,

$$K = G\ Cos.\ \phi,$$

dat is

$$K = \frac{XL + YM + ZN}{R};$$

verder is $AG^2 = AL^2 + AM^2$ of $G^2 = K^2 + p^2 R^2$, . . . (A)
waaruit voor $p = AN$ of den afstand, waarop de resultante verplaatst moeten worden, volgt,

$$p = \sqrt{\left(\frac{G^2}{R^2} - \frac{K^2}{R^2}\right)},$$

hetgeen overeenstemmen zal met het in n°. 12 gevondene, indien men opmerkt dat $\frac{G}{R}$ en $\frac{K}{R}$ de lengten van de armen der koppels G en K voorstellen, als zij tot de kracht R zijn herleid.

De resultante is nu door N gebragt, en voor elk punt der lijn door dit punt evenwijdig aan hare rigting getrokken, is het resulterend koppel een volstrekt minimum, waarvan K de waarde is.

De vergelijking (A) toont bij omkeering aan, dat, wanneer men nu de resultante uit N wederom naar eenig ander punt A verplaatst, het resulterend koppel na die verplaatsing alleen afhankelijk is van $p$ of van den afstand waarop R wordt verplaatst, en onafhankelijk van de rigting waarin dit geschiedt; terwijl $Cos.\ \phi = \frac{K}{G}$ aanwijst, dat deszelfs as steeds denzelfden hoek met de resultante zal maken.

Voor alle punten, die op een regt cirkelvormig cilindervlak gelegen zijn, waarvan de lijn door N evenwijdig aan de resultante getrokken, de as is, zullen de resulterende koppels of de momenten-maxima even groot zijn; voor de punten, die op eene zelfde beschrijvende lijn van den cilinder gelegen zijn, loopen hunne assen evenwijdig en vormen alzoo een plat vlak, en voor de punten, gelegen op eene zelfde loodregte of cirkelvormige doorsnede, maken zij denzelfden hoek met de as van den cilinder en vormen dus hunne rigtingen eene omwentelings-hyperboloïde, waarvan de as van den cilinder de omwentelings-as is, terwijl de cirkelvormige doorsnede de toppen der hyperbolen bevat.

Deze eigenschappen der as, waarvoor het moment-maximum een minimum is, hebben aan POINSOT aanleiding gegeven om dezelve centrale as der momenten te noemen. De vergelijking van Fig. 14 met Fig. 15 zal de oorzaak der bijzondere eigenschap van de centrale as der momenten nog meer ophelderen; zij AL (Fig. 15) die as en tevens de rigting der resultante, dus loodregt op het vlak PQ van het koppel; als men R uit A in E overbrengt, dan is AF loodregt op AE de as van het nieuw ontstaande koppel, en door den regthoek op AF en AL te voltooijen, zal men de as van het resulterend koppel vinden, voor elk punt der lijn uit E evenwijdig aan AL getrokken; maar laat men nu het vlak LAE rondwentelen om AL, dan blijft de regthoek steeds dezelfde, dus ook de grootte en de rigting van deszelfs diagonaal; hetgeen in Fig. 14 met het parallelogram GAFH, als men hier ook het vlak van het koppel om de resultante doet omwentelen, niet plaats kan hebben, omdat de hoek GAF ieder oogenblik verandert.

14. Om nu verder nog eens analytisch de rigting der centrale as uit het gevondene te bepalen, en daardoor de overeenstemming met de voorafgaande analytische beschouwingen aan te toonen, stellen wij ten opzigte van het coördinatenstelsel, waarvan A (Fig. 14) de oorsprong is, de coördinaten van het punt N voor door $a$, $b$ en $c$, dan is

$$AN^2 = a^2 + b^2 + c^2 = p^2;$$

de hoeken, die $p$ of AN met de assen maakt, $u$, $v$ en $w$, die van AR met de assen $\alpha$, $\beta$ en $\gamma$, en die van AG met de assen $l$, $m$ en $n$ noemende, heeft men vooreerst:

$$Cos.\ u = \frac{a}{p},\qquad Cos.\ v = \frac{b}{p},\qquad Cos.\ w = \frac{c}{p},$$

$$Cos.\ \alpha = \frac{X}{R},\qquad Cos.\ \beta = \frac{Y}{R},\qquad Cos.\ \gamma = \frac{Z}{R},$$

$$Cos.\ l = \frac{L}{G},\qquad Cos.\ m = \frac{M}{G},\qquad Cos.\ n = \frac{N}{G},$$

en omdat $p$ loodregt is op AR en AG,

$$Cos.\ u\ Cos.\ \alpha + Cos.\ v\ Cos.\ \beta + Cos.\ w\ Cos.\ \gamma = 0,$$

$$Cos.\ u\ Cos.\ l + Cos.\ v\ Cos.\ m + Cos.\ w\ Cos.\ n = 0,$$

of

$$aX + bY + cZ = 0, \ldots\ldots \quad (1)$$

$$aL + bM + cN = 0, \ldots\ldots \quad (2)$$

terwijl men nog uit (A) van n°. 18 heeft,

$$p^2 = \frac{G^2 - K^2}{R^2},$$

of

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{G^2 - K^2}{R^2}; \ldots\ldots \quad (3)$$

door de vergelijkingen (1), (2) en (3) zijn alzoo de coördinaten van een punt der centrale as bekend, en deze lijn evenwijdig loopende aan de resultante, zoo zijn hare vergelijkingen

$$\frac{x-a}{Cos.\ \alpha} = \frac{y-b}{Cos.\ \beta} = \frac{z-c}{Cos.\ \gamma},$$

of

$$\frac{x-a}{X} = \frac{y-b}{Y} = \frac{z-c}{Z}; \ldots\ldots \quad (4)$$

wij zallen hieruit die vergelijkingen herleiden tot den vorm waaronder zij in n°. 7 voorkomen. Door $a$ en $b$ uit (1) en (2) te elimineeren, heeft men

$$a\,(XM - YL) + c\,(ZM - YN) = 0,$$

$$b\,(XM - YL) + c\,(XN - ZL) = 0,$$

en hieruit de waarden van $a$ en $b$ in (3) overbrengende, komt er na herleiding

$$c^2\left\{(XM-YL)^2+(XN-ZL)^2+(ZM-YN)^2\right\}=\frac{G^2-K^2}{R^2}(XM-YL)^2, \ldots (5)$$

maar men heeft

$$G^2 - K^2 = (L^2+M^2+N^2) - \frac{(XL+YM+ZN)^2}{R^2}$$

$$= \frac{R^2(L^2+M^2+N^2)-(X^2L^2+Y^2M^2+Z^2N^2+2XYLM+2XZLN+2YZMN)}{R^2}$$

$$= \frac{L^2(Y^2+Z^2)+M^2(X^2+Z^2)+N^2(X^2+Y^2)-2(XYLM+XZLN+YZMN)}{R^2},$$

of $G^2 - K^2 = \frac{(XM - YL)^2 + (XN - ZL)^2 + (ZM - YN)^2}{R^2}$,

waardoor (5) verandert in

$$c^2 = \frac{(XM - YL)^2}{R^4},$$

dus

$$c = \pm \frac{XM - YL}{R^2},$$

$$b = \pm \frac{ZL - XN}{R^2},$$

$$a = \pm \frac{YN - ZM}{R^2};$$

om nu hier te bepalen welk teeken men moet kiezen, merken wij op dat de hoek, tusschen de assen van het oorspronkelijk koppel en van het door de verplaatsing ontstaande koppel ($pR$), in alle gevallen stomp dient te zijn, want de as van het resulterend koppel op R moetende vallen, dient R binnen dien hoek gelegen te zijn, terwijl bovendien R loodregt is op de as van $pR$.

Neemt men nu in aanmerking, dat, na de verplaatsing der resultante de zamenstellende koppels van het koppel $pR$ terug gevonden zullen worden, als men de kracht, die door N (Fig. 14) tegengesteld is aan de resultante weder in den oorsprong terug brengt, dan vindt men uit de formulen in n°. 9 opgegeven, door in dezelve te stellen

$$P = R, \; Cos. \alpha = - \frac{X}{R}, \; Cos. \beta = - \frac{Y}{R}, \; Cos. \gamma = - \frac{Z}{R},$$

$x = a$, $y = b$, $z = c$, voor de zamenstellende koppels van $pR$,

$$- (bZ - cY), \quad - (cX - aZ) \text{ en } - (aY - bX),$$

en dus voor de cosinussen der hoeken, die de as van $pR$ met de assen maakt,

$$- \frac{bZ - cY}{pR}, \quad - \frac{cX - aZ}{pR}, \quad - \frac{aY - bX}{pR};$$

de as van het koppel G maakt met de assen hoeken, waarvan de cosinussen zijn $\frac{L}{G}$, $\frac{M}{G}$ en $\frac{N}{G}$,

dus is de cosinus van den hoek, tusschen beide assen,

$$- \frac{L(bZ - cY) + M(cX - aZ) + N(aY - bX)}{pRG},$$

of $-\frac{a(YN-ZM)+b(ZL-XN)+c(XM-YL)}{pRG}$,

en hierin de waarden van $a$, $b$ en $c$ overbrengende,

$$-\frac{\pm(YN-ZM)^2\pm(ZL-XN)^2\pm(XM-YL)^2}{pR^2G};$$

deze uitdrukking moet, om de cosinus van eenen stompen hoek te kunnen zijn, voor alle waarden der daarin voorkomende grootheden, negatief wezen; men zal dus, daar de noemer altijd positief is en de teller uit de positieve of negatieve som van tweede magten bestaat, het bovenste teeken van die termen moeten nemen, alzoo ook van $a$, $b$ en $c$ de bovenste teekens; brengt men dan deze waarden in de vergelijkingen (4) over, dan zal men de derde vergelijking van n°. 7 verkrijgen, door de herleiding van

$$\frac{x-a}{X}=\frac{y-b}{Y},$$

of

$$\frac{x-\frac{YN-ZM}{R^2}}{X}=\frac{y-\frac{ZL-XN}{R^2}}{Y},$$

waarvoor men achtervolgens heeft,

$$xR^2Y-Y(YN-ZM)=yR^2X-X(ZL-XN),$$
$$R^2(yX-xY)=X(ZL-XN)-Y(YN-ZM)$$
$$=XZL+YZM-N(X^2+Y^2)$$
$$=Z(XL+YM+ZN)-NR^2,$$

en eindelijk

$$N+yX-xY=\frac{XL+YM+ZN}{R^2}Z;$$

en zoo ook zal de eerste en tweede van de vergelijkingen in n°. 7 terug gevonden worden.

15. Wil men nu de centrale as der momenten voor een gegeven stelsel van krachten bepalen, dan kan men van de aangewezen vergelijkingen gebruik maken, daartoe de vereischte grootheden berekenende; men zal hiervan een voorbeeld kunnen vinden in de *Statica* van J. P. DELPRAT, § 139 en § 140, die aldaar voor een stelsel van krachten, welke gelijkmatig over eene schroeflijn verdeeld en wier veranderlijke rigtingen voor elk punt bepaald zijn, het kleinste koppel en tevens den stand der resultante bepaalt, overeenkomende met de centrale as der momenten; wij

zullen daarom die berekeningen hier niet herhalen, maar het gevondene omtrent de momenten in het kort te zamen brengen.

1°. Als men de (sommen der) momenten, ten opzigte van drie regthoekige assen berekent, kan men uit dezelve het moment bepalen, ten opzigte van eenige lijn, die door den oorsprong gaat, indien de hoeken bekend zijn, die deze lijn met de assen maakt. Dit moment verandert niet als men die as evenwijdig aan haar zelve, en den oorsprong verplaatst op eene lijn evenwijdig aan de resultante; brengt men alzoo een vlak loodregt op hare rigting en beschouwt men alleen de punten der ruimte in dit vlak gelegen, dan zullen de bijzonderheden omtrent de momenten, ten opzigte van assen die door deze punten gaan, gemeen zijn aan alle punten der lijnen, die zij beschrijven als men het vlak evenwijdig aan zich zelven verplaatst, zoodanig dat de resultante het steeds in hetzelfde punt blijft doorsnijden.

2°. Onder al de assen, die elkander in eenig punt van het vlak snijden, onderscheidt zich die, waarvoor de som der momenten een maximum is, en voor alle assen die denzelfden hoek maken, met die van het moment-maximum, zijn de momenten gelijk; de as van het moment-maximum is dus de gemeenschappelijke as van een oneindig groot aantal regte cirkelvormige kegelvlakken, zoodanig, dat voor alle beschrijvende lijnen, op hetzelfde kegelvlak gelegen, de momenten gelijk zijn, en zij van het eene kegelvlak tot het andere veranderen in dezelfde reden als de cosinussen der halve tophoeken.

3°. Onder al de assen der momenten-maxima, voor de verschillende punten van het vlak, is wederom die merkwaardig, waarvoor het moment-maximum een minimum is; hare rigting is loodregt op het vlak of evenwijdig aan de resultante; zij kan beschouwd worden als de gemeenschappelijke as van een oneindig groot aantal regte cirkelvormige cilindervlakken, zoodanig, dat voor alle punten van hetzelfde cilindervlak de momenten-maxima even groot zijn; neemt men de punten in de cirkelvormige doorsnede van het vlak met den cilinder, dan vormen deze assen eene omwentelings-hyperboloïde met één blad, waarvan de gezegde as de omwentelings-as is.

4°. Verplaatst men nu het vlak zoodanig als aangewezen is, evenwijdig aan zich zelven, dan blijven voor al de punten der

lijnen, die door de verschillende punten van het vlak beschreven worden, de momenten-maxima even groot, en hunne assen evenwijdig, zoodat zij in een plat vlak gelegen zijn; maar onder al deze assen is dus die, welke loodregt op het vlak staat, de eenige, die standvastig dezelfde blijft, en voor alle assen, die ten opzigte van haar eenen symetrieken stand hebben, zijn de momenten even groot; het is deze as, die men door de benaming van *centrale as*, van de overige heeft onderscheiden.

## VRAAGSTUK F.

*Een regthoekig parallelopipedum, van eene overal even digte stof, drijft op het water; de langste ribben loopen evenwijdig met den waterspiegel, en de doorsnede, loodregt op de langste ribben genomen, is een vierkant. Men vraagt: welken invloed het soortelijk gewigt der stof, waaruit dit parallelopipedum bestaat, moet hebben op den stand, waarin hetzelve drijven zal; ten einde daaruit welligt de gemaakte opmerking te verklaren, dat eiken balken gewoonlijk met eene platte zijde naar boven gekeerd drijven, terwijl drijvende dennen balken gewoonlijk een der scherpe kanten naar boven keeren.*

## OPLOSSING.

1. Wanneer een ligchaam, dat in eene vloeistof drijft, uit deszelfs oorspronkelijken stand gebragt en daarna aan zich zelven overgelaten wordt, dan kan men om de beweging van dit ligchaam na te gaan de voortgaande beweging van het zwaartepunt beschouwen, even als of de geheele massa van het ligchaam, en de krachten die op hetzelve werken, in dat punt vereenigd waren; en de ronddraaijende beweging om eenige as door het zwaartepunt getrokken, heeft op dezelfde wijze plaats als of dat punt en die as onverplaatsbaar waren.

Als men nu voor eenigen stand bevindt, dat de beide bewegingen van het ligchaam, wanneer hetzelve zeer weinig uit dien stand gebragt wordt, bestaan zouden in kleine heen- en weergaande schommelingen, dan zal het evenwigt in dien stand vast zijn.

2. Om hier de vergelijkingen voor de dubbele beweging te ontwikkelen, herinneren wij aan het volgende. Als K eene standvastige kracht voorstelt, die voortdurend op de massa M werkt, dan is

de versnelling G door die kracht voortgebragt, bepaald door de formule $G = \frac{K}{M} g$; dat is als K en M in ponden zijn uitgedrukt en $g$ de aangroeijing der snelheid voorstelt, die een ligchaam, dat verticaal naar beneden valt, in eene seconde verkrijgt, dan zal G de versnelling zijn die de kracht K in dezen tijd aan de massa M mededeelt; in meters uitgedrukt is $g = 9{,}812\ldots$

Omgekeerd volgt uit die formule, $K = \frac{G}{g} M$; bovendien heeft men nog, wanneer $\delta V$ de oneindig kleine aangroeijing der snelheid V is, in den oneindig kleinen tijd $\delta t$,

$$G = \frac{\delta V}{\delta t}.$$

Verder maken wij gebruik van het grondbeginsel van D'ALEMBERT; wanneer namelijk eenige krachten voortdurend op een zamenstel van met elkander verbondene punten werken, zoodanig, dat die punten, indien zij geheel vrij waren, zich in zekere rigtingen met zekere snelheden zouden bewegen, dan zal deze beweging door het verband der punten gewijzigd worden, en de beweging die werkelijk ontstaat voor elk punt, kan toegeschreven worden, aan krachten verschillende van die, welke op het zamenstel werken, zoodat een gedeelte dezer krachten geenen invloed heeft op de beweging en dus verloren gaat; volgens het gezegde grondbeginsel moet er nu tijdens den geheelen duur der beweging evenwigt zijn tusschen de oneindig kleine krachten, die in elk oneindig klein tijddeel verloren gaan.

Stellen wij dan dat op elk punt van een ligchaam, dat om eene as kan draaijen, eene kracht werkt, waarvan X, Y en Z de zamenstellenden zijn evenwijdig aan de coördinaten-assen; indien $x$, $y$ en $z$ de coördinaten zijn van zulk een punt, dan zijn de zamenstellenden der verkregene snelheid, op zeker oogenblik der beweging, $\frac{\delta x}{\delta t}, \frac{\delta y}{\delta t}, \frac{\delta z}{\delta t}$ en de aangroeijingen ($\delta V$) dezer snelheden in den tijd $\delta t$,

$$\delta\frac{\delta x}{\delta t} = \frac{\delta^2 x}{\delta t}, \quad \delta\frac{\delta y}{\delta t} = \frac{\delta^2 y}{\delta t}, \quad \delta\frac{\delta z}{\delta t} = \frac{\delta^2 z}{\delta t};$$

de versnellingen der krachten, die deze aangroeijingen hebben voortgebragt $\left(G = \frac{\delta V}{\delta t}\right)$, zijn dus

$$\frac{\delta^2 x}{\delta t^2},\quad \frac{\delta^2 y}{\delta t^2},\quad \frac{\delta^2 z}{\delta t^2},$$

en bijgevolg de krachten $\left(K = \frac{G}{g} M\right)$ zelven, als $\delta m$ de massa van het punt voorstelt,

$$\frac{1}{g}\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}\delta m,\ \frac{1}{g}\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}\delta m,\ \frac{1}{g}\frac{\delta^2 z}{\delta t^2}\delta m;$$

wij hebben dus voor de zamenstellenden der verlorene kracht voor dit punt, in het oneindig kleine tijddeel $\delta t$,

$$X - \frac{1}{g}\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}\delta m,\ Y - \frac{1}{g}\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}\delta m,\ Z - \frac{1}{g}\frac{\delta^2 z}{\delta t^2}\delta m,$$

en soortgelijke uitdrukkingen heeft men ook voor al de overige punten.

Indien nu de as der $x$ de draaijings-as is, dan moeten, volgens het opgegeven grondbeginsel, de sommen der momenten van de krachten loodregt op deze as, namelijk van $\Sigma.(Y - \frac{1}{g}\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}\delta m)$ en $\Sigma.(Z - \frac{1}{g}\frac{\delta^2 z}{\delta t^2}\delta m)$ even groot zijn, waardoor men verkrijgt,

$$\Sigma.z(Y - \frac{1}{g}\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}\delta m) = \Sigma.y(Z - \frac{1}{g}\frac{\delta^2 z}{\delta t^2}\delta m),$$

en waaruit klaarblijkelijk volgt,

$$\frac{1}{g}\Sigma.\left(y\frac{\delta^2 z}{\delta t^2} - z\frac{\delta^2 y}{\delta t^2}\right)\delta m = \Sigma.(yZ - zY); \ldots (1)$$

evenzoo zal men vinden, voor de ronddraaijende beweging om de assen der $y$ en der $z$,

$$\frac{1}{g}\Sigma.\left(z\frac{\delta^2 x}{\delta t^2} - x\frac{\delta^2 z}{\delta t^2}\right) = \Sigma.(zX - xZ) \ldots (2)$$

$$\frac{1}{g}\Sigma.\left(x\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} - y\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}\right) = \Sigma.(xY - yX) \ldots (3)$$

Neemt men verder de rigtingen der positieve assen zoodanig aan als in Fig. 16 is aangewezen (de positieve rigting der $z$ as van boven naar onderen), en stelt men dat de ronddraaijende bewegingen om de assen plaats hebben in de rigtingen $zy$, $xz$ en $yx$, dan beweegt zich eenig punt, waarvan M′ de projectie is op het $yz$vlak, om de as der $x$ in eenen cirkel evenwijdig aan dien, waarvan $OM' = \sqrt{(y^2 + z^2)} = r_1$ de straal is, in de rigting der raaklijn M′P; zij, op zeker oogenblik, $w_1$ de hoeksnelheid om de as der

$x$, dan is $r_1 w_1$ de snelheid van het punt M; neemt men M'P $= r_1 w_1$ en ontbindt men dezelve in de snelheden M'P' en M'P" evenwijdig aan de assen der $y$ en der $z$, dan is klaarblijkelijk

$$\frac{\delta y}{\delta t} = \text{M'P'} \text{ en } \frac{\delta z}{\delta t} = -\text{M'P"},$$

en

$$\text{M'P'} = \text{PP"} = \text{M'P } Sin.\ \text{PMP"} = \text{M'P } Sin.\ \text{yOM'},$$
$$\text{M'P"} = \text{M'P } Cos.\ \text{PMP"} = \text{M'P } Cos.\ \text{yOM'},$$

of, omdat $Cos.\ \text{yOM'} = \frac{\text{ON}}{\text{OM'}} = \frac{y}{r_1}$ en $Sin.\ \text{yOM'} = \frac{\text{M'N}}{\text{OM'}} = \frac{z}{r_1}$ is,

$$\frac{\delta y}{\delta t} = z w_1, \quad \frac{\delta z}{\delta t} = -y w_1,$$

dus

$$y\frac{\delta z}{\delta t} - z\frac{\delta y}{\delta t} = -(y^2 + z^2)\, w_1 = -r_1^2 w_1,$$

dit differentierende, in aanmerking nemende dat voor het hier beschouwde punt $r_1$ standvastig is, krijgt men

$$y\frac{\delta^2 z}{\delta t^2} - z\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = -r_1^2\frac{\delta w_1}{\delta t}.$$

Stelt men verder den hoek, die in zeker oogenblik der beweging begrepen is tusschen het $xy$vlak en een vlak door de as der $x$, dat bij het begin der beweging op het $xy$vlak lag, gerekend in de rigting der beweging, namelijk $\angle \text{yOy'} = \theta_1$, dan is de hoeksnelheid op dit oogenblik bepaald door

$$w_1 = \frac{\delta \theta_1}{\delta t},$$

dus

$$\frac{\delta w_1}{\delta t} = \frac{\delta^2 \theta_1}{\delta t^2},$$

zoodat de voorgaande vergelijking overgaat in

$$y\frac{\delta^2 z}{\delta t^2} - z\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = -r_1^2\frac{\delta^2 \theta_1}{\delta t^2};$$

en dit in de vergelijking (1) overbrengende, verkrijgt men

$$\frac{1}{g}\,\Sigma.\left(-r_1^2\frac{\delta^2\theta_1}{\delta t^2}\,\delta m\right) = \Sigma.(yZ - zY),$$

of daar hier $\frac{\delta^2\theta_1}{\delta t^2}$ voor al de punten van het ligchaam dezelfde is,

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\delta^2\theta_1}{\delta t^2}\,\Sigma.(r_1^2\delta m) = -\Sigma.(yZ - zY),$$

dat is $$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\Sigma.(y^2+z^2)\partial m=-\Sigma.(yZ-zY); \quad . \; . \; (4)$$
wanneer $\theta_2$ en $\theta_3$ voor de assen der $y$ en der $z$ hetzelfde voorstellen, wat $\theta_1$ voor de as der $x$ voorstelt, namelijk de hoeken die vlakken, welke oorspronkelijk op de $xy$ en $yz$vlakken gelegen waren, om die assen beschreven hebben op het oogenblik dat hier de beweging beschouwd wordt, verkrijgt men op dezelfde wijze, voor de draaijende beweging om die assen,

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\Sigma.(x^2+z^2)\partial m=-\Sigma.(zX-xZ), \; . \; . \; . \; (5)$$
$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial^2\theta_3}{\partial t^2}\Sigma.(x^2+y^2)\partial m=-\Sigma.(xY-yX) \; . \; . \; . \; (6)$$

Indien er alleen verticale krachten op het ligchaam werken, zoo als onder zekere omstandigheden bij een drijvend ligchaam plaats heeft, dan moet men in (4), (5) en (6) $X=0$ en $Y=0$ stellen, waardoor deze vergelijkingen overgaan in:

$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\Sigma.(y^2+z^2)\partial m=-\Sigma.yZ. \; . \; . \; . \; . \; (7)$$
$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\Sigma.(x^2+z^2)\partial m=+\Sigma.xZ. \; . \; . \; . \; (8)$$
$$\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial^2\theta_3}{\partial t^2}\Sigma.(x^2+y^2)\partial m=0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9).$$

3. Stel dat Fig. 17 den stand voorstelt van een ligchaam, oorspronkelijk zoodanig in de vloeistof geplaatst, dat AB de horizontale doorsnede met den waterspiegel en de lijn Z'E' in den verticalen stand ZE was, terwijl in deze verticaal de zwaartepunten Z en D van het ligchaam en van de verplaatste vloeistof gelegen waren, en stel dat het ligchaam uit dien stand gebragt is door het zwaartepunt Z op eenen zeer kleinen afstand ZZ' naar beneden te brengen, tevens aan de lijn ZE eene zeer geringe helling gevende, waardoor nu A'B' de doorsnede met den waterspiegel en nagenoeg CC' = ZZ' wordt; als men eene zeer kleine grootheid van de tweede orde verwaarloost. Het zwaartepunt van de oorspronkelijk verplaatste vloeistof valt nu in D' zoodanig, dat Z'D' = ZD is. Stel verder in Z' de oorsprong van een assenstelsel zoodanig, dat het $xz$ en het $yz$vlak beiden verticaal zijn en het ligchaam in den oorspronkelijken stand in twee symetrieke deelen verdeelen, terwijl

men dit dan ook nog zal kunnen aannemen na de zeer kleine verplaatsing van het ligchaam, en zij de positieve rigting der $z$as even als in Fig 16, van boven naar onderen. De geringe helling der lijn Z'E' zal men nu kunnen bepalen door de zeer kleine hoeken, die zij om elk der assen beschreven heeft, om uit den stand ZE in den stand Z'E' te komen; deze hoeken verkrijgt men door vlakken te brengen door Z'E' en elk der assen; zoo is, zie Fig. 18, waarin Z'E' en de assen uit Fig. 17 zijn overgeteekend, de hoek om de as der $x$ beschreven, bepaald door den hoek die het vlak xZ'D'' maakt met het $xz$vlak; doch daar de rigting der beweging om de as der $x$ van $z$ naar $y$ gaat is deze hoek negatief; de hoeken om de assen der $y$ en der $z$ beschreven, worden bepaald door de vlakken yZ'D''' en EZ'D''''; men stelle dan

$$\angle EZ'D'' = -\alpha,\quad \angle EZ'D''' = \beta,\quad \angle yZ'D'''' = \gamma,$$

zijnde deze hoeken de waarden van $\theta_1$, $\theta_2$, en $\theta_3$ in (7), (8) en (9) bij het begin der beweging, op het oogenblik dus dat $t$ en de hoeksnelheden $\frac{\partial\theta_1}{\partial t}$, $\frac{\partial\theta_2}{\partial t}$ en $\frac{\partial\theta_3}{\partial t}$ gelijk nul zijn, en zoo klein dat men mag aannemen

$$Sin.\,\alpha = \alpha = Tang.\,\alpha,\quad Sin.\,\beta = \beta = Tang.\,\beta,\quad Sin.\,\gamma = \gamma = Tang.\,\gamma$$

en $$Cos.\,\alpha = Cos.\,\beta = Cos.\,\gamma = 1.$$

Stelt men verder bij den aanvang der beweging ZZ' $=$ CC' $= \xi$, en na dit oogenblik deze veranderlijke grootheid, die steeds zeer klein blijft door $\xi$ voor, dan zullen wij de waarden der grootheden $\xi$, $\theta_1$, $\theta_2$ en $\theta_3$ trachten te bepalen voor elk oogenblik der beweging, nadat men het ligchaam uit den evenwigts-toestand gebragt en aan zich zelven overgelaten heeft.

Zij het volumen der oorspronkelijke verplaatste vloeistof ALB $=$ V; de inhoud der doorsnede A'B' $=$ I (welke in de eerste oogenblikken der beweging, en als men bevindt, dat deze laatste slechts in kleine schommelingen bestaat, tijdens derzelver geheelen duur als standvastig mag aangenomen worden); het soortelijk gewigt der vloeistof $= \rho$; de afstand der zwaartepunten ZD $=$ Z'D' $= d$, moetende $d$ positief of negatief gesteld worden, naarmate het zwaartepunt der verplaatste vloeistof hooger of lager ligt dan dat van het ligchaam.

De krachten, die nu op het ligchaam werken, zijn:

1°. Het gewigt van het ligchaam werkende in Z' van boven

naar onderen en gelijk aan dat der verplaatste vloeistof, dus is deze (zamenstellende) kracht $= + \rho V$.

2°. De tegengestelde drukking der vloeistof, welke oorspronkelijk verplaatst was, werkende in D' van onderen naar boven, zoodat die (zamenstellende) kracht wordt — $\rho V$; en

3°. De opwaardsche druk van de vloeistof begrepen tusschen AB en A'B'; om deze te bepalen onderstellen wij, dat het ligchaam tusschen deze vlakken cilindervormig zij, waardoor slechts oneindige kleine grootheden van den tweeden rang verwaarloosd worden, en wij verdeelen het vlak A'B', dat evenwijdig is aan het $xy$vlak, in differentialen, door vlakken evenwijdig aan de $xz$ en $yz$vlakken, dan is $\delta x \delta y$ de inhoud van zulk eene differentiaal en tevens de bazis van een prisma der vloeistof tusschen AB en A'B', dat het gedeelte GH eener verticale lijn tusschen deze vlakken tot hoogte heeft; het gewigt van dit prisma of de differentiaal van het gewigt der vloeistof tusschen AB en A'B' is dus $\rho \delta x \delta y \times$ GH.

Om de lengte van GH te bepalen beschouwen wij Fig. 19, alwaar Fig. 17 voor een gedeelte is overgeteekend; wanneer FG in het horizontale vlak van A'B' evenwijdig aan de as der $y$ getrokken wordt, dan is C'F $= x$, en FG $= y$; trekt men verder FI verticaal in het $xz$vlak en vereenigt men I met H, zoodat HI in het vlak van AB ligt, dan kan GH in drie stukken GG', G'K en KH verdeeld worden, door CF' horizontaal, F'G' en IK evenwijdig aan de as der $y$ te trekken; in de figuur heeft men nu

$$GH = GG' + G'K + KH = CC' + F'I + KH,$$

of $$GH = \xi + x \; Tang. F'CI + y \; Tang. KIH;$$

brengt men door de as der $y$ en de lijn Z'E' het vlak yZ'D''', dan is (vergelijk Fig. 18) $\angle$ EZ'D''' $= \theta_2$, en omdat het vlak van AB (dit vlak is loodregt op Z'E') en het $xz$vlak beide loodregt zijn op het vlak yZ'E'D''', zal ook de doorsnede AB, van die vlakken, loodregt op yZ'D''', of AB loodregt op Z'D''' zijn, waaruit volgt

$$\angle EZ'D''' = \angle F'CI = \theta_2;$$

brengt men door de as der $x$ en Z'E' het vlak xZ'D'', dan is $\angle$ EZ'D'' $= - \theta_1$, en laat men door I een vlak I''II' gaan, evenwijdig aan xZ'D'', dan is de doorsnede II' met het vlak FGHI, evenwijdig aan Z'D'', dus ook F'II' $= - \theta_1$, maar nu zijn het vlak der doorsnede AB en het vlak FGHI beide loodregt op I''II',

dus ook hunne doorsnede IH loodregt op I'H' of IH loodregt op II' en daarom $\angle$ HIK $= \angle$ F'II' $= -\theta_1$; hierdoor heeft men

$$GH = \xi + x\ Tang.\ \theta_2 - y\ Tang.\ \theta_1,$$

of

$$GH = \xi + \theta_2 x - \theta_1 y,$$

waardoor de differentiaal van het gewigt der vloeistof tusschen AB en A'B' wordt

$$\rho\,(\xi + \theta_2 x - \theta_1 y)\,\delta x \delta y;$$

het geheele gewigt dier vloeistof is dus

$$\rho \int\int (\xi + \theta_2 x - \theta_1 y)\,\delta x \delta y,$$

waarin de integralen over het geheele vlak van A'B' moeten uitgebreid worden; uit de symetrieke ligging van deszelfs gedeelten, ten opzigte der $xz$ en $yz$ vlakken, heeft men in dit geval

$$\int\int x \delta x \delta y = \int \delta y \int x \delta x = 0; \quad \int\int y \delta x \delta y = \int \delta x \int y \delta y = 0$$

en tevens is $\int\int \delta x \delta y = I$;

zoodat het gezegde gewigt uitgedrukt wordt door $\rho\xi I$, en omdat hetzelve eene opwaardsche drukking voortbrengt is de (zamenstellende) kracht die daardoor op het ligchaam werkt $-\rho\xi I$; de horizontale drukkingen der vloeistof vernietigen elkander, waardoor X $=$ 0 en Y $=$ 0 is.

Brengt men nu al de krachten en de massa van het geheele ligchaam in het zwaartepunt over, dan werkt dáár eene kracht

$$+\rho V - \rho V - \rho\xi I = -\rho\xi I$$

op de massa $\rho V$;

de versnelling dezer kracht $\left(G = \frac{K}{M} g\right)$ is dus

$$-\frac{\rho\xi I}{\rho V} g = -\frac{\xi I}{V} g;$$

maar op zeker oogenblik is de snelheid der verticale beweging van het zwaartepunt, in de positieve rigting der $z$ as, $\frac{\delta\xi}{\delta t}$, dus de aangroeijing dier snelheid, in den tijd $\delta t$, $\frac{\delta^2\xi}{\delta t}$, en de versnelling der kracht, die deze aangroeijing heeft voortgebragt, $\frac{\delta^2\xi}{\delta t^2}$; door de uitdrukkingen voor de versnelling gevonden aan elkander gelijk te stellen, krijgt men alzoo

$$\frac{\delta^2\xi}{\delta t^2} = -\frac{gI}{V}\,\xi,$$

of $$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{gI}{V} \xi = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

voor de vergelijking der verticale beweging van het zwaartepunt. Wij zullen dezelve integreren, na eerst de vergelijkingen voor de ronddraaijende beweging gezocht te hebben.

Hiertoe moeten wij de momenten der verticale krachten, ten opzigte der $x$ en $y$ assen, bepalen, en daaruit de sommen der momenten $\Sigma . yZ$, $\Sigma . xZ$.

Het moment der eerste kracht $+ \rho V$ is nul, omdat deze kracht in het zwaartepunt of den oorsprong werkt.

Om de momenten der kracht $- \rho V$ te bepalen, die in D′ (Fig. 17) naar boven werkt, laten wij uit D′ (zie Fig. 18) eene loodlijn $D'D''''$ op het syvlak vallen en trekken uit $D''''$ lijnen, evenwijdig aan de assen der $x$ en $y$, dan zijn $D''''D''''' \times - \rho V$ en $Z'D''''' \times - \rho V$ deze momenten, ten opzigte der assen van de $x$ en de $y$. Wegens de geringe helling van $Z'D'$ mag men door eene oneindig kleine grootheid van den tweeden graad te verwaarloozen $Z'D' = D'D''''' = Z'D'''$ stellen, en men heeft dan

$$D''''D''''' = D'D''''' \; Cos. \; D'D'''''D'''' = Z'D' \; Sin. \; D'D'''''D'''$$
$$= Z'D' \; Sin. \; D''Z'E = - d \; Sin. \; \theta_1 ,$$
$$Z'D''''' = Z'D''' \; Cos. \; D'''Z'D''''' = Z'D' \; Sin. \; EZ'D''' = d \; Sin. \; \theta_2 ,$$

of wegens de kleinheid der hoeken $\theta_1$ en $\theta_2$,

$$D''''D''''' = - d\theta_1 , \quad Z'D''''' = d\theta_2 ,$$

waardoor de gezochte momenten worden

$$- d\theta_1 \times - \rho V = + \rho d V \theta_1 , \quad d\theta_2 \times - \rho V = - \rho d V \theta_2 .$$

Voor de momenten der opwaardsche drukkingen van de vloeistof tusschen AB en A′B′ heeft men (ten opzigte der $x$ en der $y$ as),

$$- \rho \int\int y \, (\xi + \theta_2 x - \theta_1 y) \, \partial x \partial y$$
$$= - \rho \xi \int\int y \partial x \partial y - \rho \theta_2 \int\int x y \partial x \partial y + \rho \theta_1 \int\int y^2 \partial x \partial y ,$$
$$- \rho \int\int x \, (\xi + \theta_2 x - \theta_1 y) \, \partial x \partial y$$
$$= - \rho \xi \int\int x \partial y \partial x - \rho \theta_2 \int\int x^2 \partial y \partial x + \rho \theta_1 \int\int x y \partial y \partial x ,$$

in aanmerking nemende dat de integralen $\int\int x \partial x \partial y$, $\int\int y \partial x \partial y$ en $\int\int x y \partial x \partial y$ verdwijnen, als zij over de geheele doorsnede A′B′ worden uitgebreid, en ter bekorting $\int y^2 \partial x \partial y = A$, $\int x^2 \partial x \partial y = B$ stellende, zoo heeft men voor die momenten

$$+ \theta_1 \rho A \text{ en } - \theta_2 \rho B.$$

Men zal dus hebben

$$\Sigma . yZ = + \rho d V \theta_1 + \rho \theta_1 A = \rho \theta_1 (dV + A),$$

$$\Sigma . xZ = - \rho dV\theta_2 - \rho\theta_2 B = - \rho\theta_2 (dV + B),$$

en als men dit in de vergelijkingen (7), (8) en (9) van n°. 2 overbrengt, dan worden zij

$$\frac{1}{g} . \frac{\delta^2\theta_1}{\delta t^2} \Sigma . (y^2 + z^2) \delta m = - \rho\theta_1 (dV + A),$$

$$\frac{1}{g} . \frac{\delta^2\theta_2}{\delta t^2} \Sigma . (x^2 + z^2) \delta m = - \rho\theta_2 (dV + B),$$

$$\frac{1}{g} . \frac{\delta^2\theta_3}{\delta t^2} \Sigma . (x^2 + y^2) \delta m = 0;$$

de sommen $\Sigma.(x^2 + z^2)\delta m$, $\Sigma.(y^2 + z^2)\delta m$, $\Sigma.(x^2 + y^2)\delta m$ moeten over al de stoffelijke punten van het ligchaam uitgebreid worden, waardoor zij in integralen overgaan. Stelt men ter bekorting de momenten van traagheid

$\int(y^2 + z^2)\delta m = C$, $\int(x^2 + z^2)\delta m = D$, $\int(x^2 + y^2)\delta m = E$,

dan kunnen de laatste vergelijkingen herleid worden tot

$$\frac{\delta^2\theta_1}{\delta t^2} + \frac{\rho g\ (dV + A)}{C} \theta_1 = 0, \quad \ldots \quad (11)$$

$$\frac{\delta^2\theta_2}{\delta t^2} + \frac{\rho g\ (dV + B)}{D} \theta_2 = 0, \quad \ldots \quad (12)$$

$$\frac{\delta^2\theta_3}{\delta t^2} = 0. \quad \ldots \quad (13)$$

Door de vergelijkingen (10), (11), (12) en (13) te integreren zal men de formulen verkrijgen, waardoor de waarden der grootheden $\xi$, $\theta_1$, $\theta_2$ en $\theta_3$ voor elk oogenblik, na het begin der beweging, bepaald zijn.

4. Indien de uitdrukkingen $dV + A$ en $dV + B$ beide positief zijn, dan zijn ook de gezegde vergelijkingen allen begrepen

in den vorm $$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} + a^2 y = 0,$$

waarvan de integraal is

$$y = p \ Sin.\ ax + q\ Cos.\ ax,$$

en waarin de standvastige grootheden $p$ en $q$ uit de overeenkomstige waarden van $y$ en $\frac{\delta y}{\delta x}$ voor eene bepaalde waarde van $x$ kunnen berekend worden.

In (10) heeft men $a^2 = + \frac{gI}{V}$,

en dus
$$\xi = p \, Sin. \, ta + q \, Cos. \, ta,$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = ap \, Cos. \, ta - aq \, Sin. \, ta;$$

daar nu voor $t = 0$, $\xi = \xi_1$ en $\frac{\partial \xi}{\partial t} =$ (de aanvankelijke snelheid) $= 0$ is, vindt men $q = \xi_1$ en $p = 0$, zoodat
$$\xi = \xi_1 \, Cos. \left(t\sqrt{\frac{gl}{V}}\right) \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

In (11), (12) en (13) stelle men beurtelings
$$a^2 = \frac{\rho g \, (dV + A)}{C},$$
$$a^2 = \frac{\rho g \, (dV + B)}{D},$$
$$a^2 = 0,$$

en voor $t = 0$, $\theta_1 = \alpha$, $\theta_2 = \beta$, $\theta_3 = \gamma$, $\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \frac{\partial \theta_3}{\partial t} = 0$, omdat de aanvankelijke hoeksnelheden gelijk nul zijn, dan vindt men:
$$\theta_1 = \alpha \, Cos. \left(t \sqrt{\frac{\rho g \, (dV + A)}{C}}\right), \ldots \quad (15)$$
$$\theta_2 = \beta \, Cos. \left(t \sqrt{\frac{\rho g \, (dV + B)}{D}}\right), \ldots \quad (16)$$
$$\theta_3 = Const. = \gamma.$$

Zijn echter de uitdrukkingen $dV + A$ en $dV + B$ negatief, dus $-(dV + A)$ en $-(dV + B)$ positief, dan behooren de vergelijkingen (11) en (12) tot den vorm
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a^2 y = 0,$$
waarvan de volkomene integraal is
$$y = Ce^{ax} + C_1 e^{-ax},$$
terwijl
$$\frac{\partial y}{\partial x} = aCe^{ax} - aC_1 e^{-ax};$$
voor (11) zal men vinden $C = C_1 = \frac{1}{2}\alpha$ en voor (12) $C = C_1 = \frac{1}{2}\beta$; zoodat in dit geval $\theta_1$ en $\theta_2$ bepaald zijn door
$$\theta_1 = \tfrac{1}{2}\alpha \left\{ e^{t\sqrt{-\frac{\rho g (dV + A)}{C}}} + e^{-t\sqrt{-\frac{\rho g (dV + A)}{C}}} \right\} \quad (17)$$
$$\theta_2 = \tfrac{1}{2}\beta \left\{ e^{t\sqrt{-\frac{\rho g (dV + B)}{D}}} + e^{-t\sqrt{-\frac{\rho g (dV + B)}{D}}} \right\} \quad (18).$$

Uit de vergelijking (14) ziet men, dat het ligchaam, wanneer hetzelve oorspronkelijk in de vloeistof dreef en dus soortelijk ligter dan de vloeistof was, altijd in de verticaal van het zwaartepunt op en neder zal schommelen; de oorspronkelijke plaats van het zwaartepunt zal het middelpunt dezer schommelingen en $2\xi$ hunne grootte zijn, dewijl $Cos.\left(t\sqrt{\frac{gI}{V}}\right)$ tusschen de grenzen $+1$ en $-1$ gedurig afneemt en aangroeit; telkens als $t\sqrt{\frac{gI}{V}} = \frac{2n+1}{2}\pi$ is, bevindt zich het zwaartepunt op deszelfs oorspronkelijke plaats; en voor den tijd eener geheele schommeling, waarin het zwaartepunt van het laagste tot het hoogste punt klimt, vindt men uit $t\sqrt{\frac{gI}{V}} = \pi$, $t = \pi\sqrt{\frac{V}{gI}}$; overeenkomende met den slingertijd van eenen enkelvoudigen slinger, waarvan $\frac{V}{I}$ de lengte is.

Zoo ook volgt uit (15) en (16), dat de draaijende bewegingen om de assen der $x$ en der $y$ in heen- en wedergaande schommelingen zullen bestaan, als $dV + A$ en $dV + B$ beide positief zijn, omdat dan $\theta_1$ en $\theta_2$ periodieke functiën zijn van den tijd, die tusschen twee bepaalde grenzen ($+\alpha$ en $-\alpha$ en $+\beta$ en $-\beta$) afnemen en aangroeijen; zijn echter $(dV + A)$ en $(dV + B)$ negatief, dan groeijen, ingevolge (17) en (18), de waarden van $\theta_1$ en $\theta_2$ met den tijd gedurig aan en het ligchaam zal zich meer en meer van zijnen oorspronkelijken evenwigts-toestand verwijderen.

Was een der uitdrukkingen positief en de andere negatief, dan zoude het ligchaam om een der assen schommelen, dus met betrekking tot die as het evenwigt vast zijn, maar ten opzigte der andere as zoude hetzelve zich meer en meer van den oorspronkelijken stand verwijderen.

Was een der uitdrukkingen gelijk *nul*, dan zou het evenwigt ten opzigte der as, waarbij die uitdrukking behoort, in elken stand vast wezen, en waren beide uitdrukkingen gelijk *nul*, dan blijft het ligchaam na elke kleine verplaatsing in rust.

Eindelijk volgt uit (14), dat het ligchaam niet om de verticale as zal ronddraaijen.

Uit dit alles kan men alzoo besluiten, dat de stabiliteit van

het drijvende ligchaam afhankelijk is van de teekens der grootheden $dV + A$ en $dV + B$, en deze zullen zeker positief wezen, als $d$ positief is, dat is: als het zwaartepunt der verplaatste vloeistof hooger ligt dan dat van het ligchaam; in het tegenovergestelde geval zal men de waarden dier grootheden moeten berekenen.

Uit (15) en (16) ziet men, dat in het geval der stabiliteit de tijd eener heen- en wedergaande schommeling om de as der $x$ en om die der $y$, bepaald is door

$$\pi \sqrt{\frac{C}{g\rho\,(dV + A)}} \text{ en } \pi \sqrt{\frac{D}{g\rho\,(dV + B)}},$$

overeenkomende met de slingertijden van eenen eenvoudigen slinger, waarvan de lengten zijn $\frac{C}{\rho\,(dV + A)}$, $\frac{D}{\rho\,(dV + B)}$.
Berekent men die slingertijden, alsmede den tijd eener verticale slingering voor verschillende vaartuigen, dan zal men daaruit kunnen nagaan, of hunne bewegingen meer of minder gevoelig zijn.

Stel nu, dat het drijvende ligchaam een parallelopipedum zij (Fig. 20), waarvan de ribben $AB = 2l$ en $AC = 2b$ evenwijdig loopen met den waterspiegel, terwijl de ribbe $AD = 2h$ loodregt op denzelven staat; zij S het soortelijk gewigt der stof, waaruit hetzelve bestaat, en $\rho = 1$ het soortelijk gewigt der vloeistof; de diepte der inzinking is dan $2hS = ED$, het volume der verplaatste vloeistof $V = 8lbhS$; de afstand der zwaartepunten $\frac{1}{2}(2h - 2hS) = h(1 - S)$, en daar hier dat der verplaatste vloeistof het laagste ligt, moet men stellen $d = -h\,(1 - S)$.

Verder heeft men, als de assen der $x$ en $y$ door het zwaartepunt evenwijdig aan de ribben $2l$ en $2b$ worden aangenomen,

$$A = \int\int y^2 \delta x \delta y = \int_{-l}^{+l} \delta x \int_{-b}^{+b} y^2 \delta y = \tfrac{4}{3} lb^3,$$

$$B = \int\int x^2 \delta x \delta y = \int_{-b}^{+b} \delta y \int_{-l}^{+l} x^2 \delta x = \tfrac{4}{3} l^3 b,$$

bijgevolg,

$$dV + A = -8blh^2\,S\,(1 - S) + \tfrac{4}{3} lb^3 = \tfrac{4}{3} lb \left\{-6h^2 S\,(1 - S) + b^2\right\},$$

$$dV + B = -8blh^2\,S\,(1 - S) + \tfrac{4}{3} l^3 b = \tfrac{4}{3} lb \left\{-6h^2 S(1 - S) + l^2\right\},$$

waaruit volgt, dat het evenwigt in alle rigtingen stabiel zal zijn, wanneer $b$ de kleinste horizontale ribbe voorstelt, als men heeft

$$b^2 > 6h^2 S\,(1 - S); \ldots\ldots (a)$$

het maximum van $S\,(1 - S)$ is voor $S = \frac{1}{2}$, $S\,(1 - S) = \frac{1}{4}$, er is dus zeker stabiliteit, als $b^2 > \frac{6}{4}\,h^2$ of $b > h\,\sqrt{\frac{3}{2}}$ is; is $b < h\,\sqrt{\frac{3}{2}}$, dan moet men onderzoeken, of aan de voorwaarde ($a$) voldaan wordt.

Stelt men $h = b$, dat is, de doorsnede van den balk zij een vierkant, dan moet $1 > 6S\,(1 - S)$ zijn, waaruit men zal vinden

$$S < \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}\sqrt{3} \quad \text{of } S > \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\sqrt{3},$$

of $$S < 0..211\ldots\ldots \quad S > 0.789\ldots\ldots;$$

daar nu het soortelijk gewigt van dennenhout binnen deze grenzen valt, zoo zullen dennenbalken, waarvan de doorsnede een vierkant is, niet altijd met hunne platte zijden naar boven blijven drijven; wel eikenbalken, waarvan het soortelijk gewigt meestal grooter dan 0.789... is.

Zoo ook is in ($a$) de factor $S\ (1 - S)$, voor dennenhout grooter dan voor eikenhout, omdat het soortelijk gewigt van het eerste minder dan dat van het tweede van $\frac{1}{2}$ verschilt; bij gelijke hoogte moeten dus dennenbalken eene grootere breedte hebben, dan eikenbalken, om even als deze, met hunne platte zijde naar boven gekeerd, te blijven drijven.

Wilde men in het geval der stabiliteit de slingertijden voor het parallelopipedum berekenen, volgens de aangewezene formulen, dan heeft men daartoe

$$C = \int (y^2 + z^2)\partial m = S\int_{-l}^{+l}\partial x\int_{-b}^{+b}\partial y\int_{-h}^{+h}(y^2 + z^2)\partial z = \frac{8hbl}{3}S(b^2 + h^2),$$

$$D = \int (x^2 + z^2)\partial m = S\int_{-l}^{+l}\partial x\int_{-b}^{+b}\partial y\int_{-h}^{+h}(x^2 + z^2)\partial z = \frac{8hbl}{3}S(l^2 + h^2),$$

en door dit met de overige bekende grootheden in die formulen te substitueren, zal men die tijden kunnen bepalen.

Om de gevondene formulen toe te passen op eenen bol, waarvan het soortelijk gewigt $S = \frac{1}{2}$, de straal $= r$, en dus ook de diepte der inzinking $= r$ is, heeft men voor het volume der verplaatste vloeistof $V = \frac{2}{3}\pi r^3$; het zwaartepunt van dit volume ligt op den afstand $\dfrac{3}{8}\,r$ onder dat van den bol, dus $d = -\dfrac{3}{8}r$; verder

$$A=\int_{-r}^{+r}\partial x\int_{-\sqrt{(r^2-x^2)}}^{+\sqrt{(r^2-x^2)}}y^2\partial y=\tfrac{2}{3}\int_{-r}^{+r}(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\partial x=\frac{\pi r^4}{4},$$

$$B=\int_{-r}^{+r}\partial y\int_{-\sqrt{(r^2-y^2)}}^{+\sqrt{(r^2-y^2)}}x^2\partial x=\tfrac{2}{3}\int_{-r}^{+r}(r^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\partial y=\frac{\pi r^4}{4},$$

bijgevolg $dV + A = -\tfrac{1}{4}\pi r^4 + \tfrac{1}{4}\pi r^4 = 0,$

$dV + B = -\tfrac{1}{4}\pi r^4 + \tfrac{1}{4}\pi r^4 = 0,$

zoodat het ligchaam in elken stand in evenwigt zal blijven; de tijd eener verticale slingering is, omdat men hier heeft voor den inhoud der doorsnede met den waterspiegel $I = \pi r^2$,

$$\pi\sqrt{\frac{V}{gI}} = \pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\pi r^3}{g\pi r^2}} = \pi\sqrt{\frac{1}{g}.\tfrac{2}{3}r},$$

overeenkomende met de slingertijd van den eenvoudigen slinger, waarvan de lengte $\tfrac{2}{3}r$ is.

Stel nog, dat het ingedompelde ligchaam eene ellipsoïde zij, waarvan $ZC = a$, $ZD' = b$, en $ZB = c$ de halve assen zijn, en zij de ellips FEGH de doorsnede met den waterspiegel; wanneer men $EB = x$ stelt, dan zijn de halve assen der ellipsvormige doorsnede op dien afstand van den top $EH = \frac{a}{c}\sqrt{(2cx - x^2)} = a'$ en $EF = \frac{b}{c}\sqrt{(2cx - x^2)} = b'$; de inhoud dier ellips is dus $\pi a'b' = \pi\frac{ab}{c^2}(2cx - x^2)$; de differentiaal van den inhoud der ellipsoïde $= \pi\frac{ab}{c^2}(2cx - x^2)\partial x$ en dus het volume van de verplaatste vloeistof (water)

$$V = \pi\int_0^x \frac{ab}{c^2}(2cx - x^2)\partial x = \frac{\pi ab}{3c^2}(3c - x)x^2,$$

en het volume der geheele ellipsoïde

$$= \tfrac{4}{3}\pi abc.$$

Als dus het soortelijk gewigt S is, dan wordt de diepte der inzinking bepaald door

$$\tfrac{4}{3}\pi abcS = \frac{\pi ab}{3c^2}(3c - x)x^2,$$

of door $$4c^3S = (3c - x)x^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A).$$

Wanneer het zwaartepunt der verplaatste vloeistof in D ligt, dus $ZD = -d$, of $BD = c - (-d) = c + d$ is, dan heeft men volgens de theorie der momenten

$$(c+d)\,V = \frac{\pi ab}{c^2}\int_0^x x\times(2cx - x^2)\,\delta x = \frac{\pi ab}{c^2}\left(\tfrac{2}{3}cx^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right),$$

dus
$$dV = \frac{\pi ab}{c^2}\left(\tfrac{2}{3}\,cx^3 - \tfrac{1}{4}\,x^4\right) - cV,$$

$$dV = \frac{\pi ab}{c^2}\left(\tfrac{2}{3}\,cx^3 - \tfrac{1}{4}\,x^4\right) - \frac{\pi ab}{3c}\,(3c - x)\,x^2,$$

$$dV = -\frac{\pi ab}{c^2}\left\{\tfrac{1}{4}\,x^4 - cx^3 + c^2x^2\right\} = -\frac{\pi ab}{4c^2}\,(2cx - x^2)^2;$$

verder is voor de doorsnede FEGH

$$A = \int\int y^2\,\delta y\,\delta x = \frac{\pi}{4}\,a'b'^3 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{ab^3}{c^4}\,(2cx - x^2)^2,$$

$$B = \int\int x^2\,\delta y\,\delta x = \frac{\pi}{4}\,a'^3b' = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{a^3b}{c^4}\,(2cx - x^2)^2,$$

waardoor men heeft

$$dV + A = -\frac{\pi ab}{4c^2}\,(2cx - x^2)^2 + \frac{\pi ab^3}{4c^4}\,(2cx - x^2)^2$$

$$= \frac{\pi ab}{4c^2}\,(2cx - x^2)\left\{-1 + \frac{b^2}{c^2}\right\},$$

$$dV + B = -\frac{\pi ab}{4c^2}\,(2cx - x^2)^2 + \frac{\pi a^3b}{4c^4}\,(2cx - x^2)^2$$

$$= \frac{\pi ab}{4c^2}\,(2cx - x^2)\left(-1 + \frac{a^2}{c^2}\right);$$

de voorwaarden voor de stabiliteit zijn dus

$$1 < \frac{a^2}{c^2} \quad \text{en} \quad 1 < \frac{b^2}{c^2},$$

of
$$c < a \quad \text{»} \quad c < b,$$

dat is, de verticale as moet de kleinste zijn.

Om den duur der schommelingen te bepalen, zal men uit (A) de waarde van $x$ moeten berekenen; stelt men $S = \frac{1}{2}$, dan is $x = c$ en $I = \pi ab$, waardoor men voor den tijd eener verticale slingering heeft

$$\pi\sqrt{\frac{V}{gI}} = \pi\sqrt{\frac{\frac{2}{3}\pi abc}{g\pi ab}} = \pi\sqrt{\frac{1}{g}\cdot\tfrac{2}{3}c},$$

even als bij den bol.

Om de beide overige slingertijden te berekenen heeft men voor $S = \frac{1}{2}$

$$dV + B = \frac{\pi}{4}\,ab\,(a^2 - c^2),\ dV + A = \frac{\pi}{4}\,ab\,(b^2 - c^2);$$

verder zijn de momenten van traagheid

$$C = \int(y^2 + z^2)\,\delta m = \tfrac{2}{15}\,\pi abc\,(b^2 + c^2),$$
$$D = \int(x^2 + z^2)\,\delta m = \tfrac{2}{15}\,\pi abc\,(a^2 + c^2),$$

waardoor men voor den duur der slingeringen om de assen der $x$ en der $y$ verkrijgt

$$\pi\sqrt{\frac{C}{g\rho\,(dV + A)}} = \pi\sqrt{\frac{\frac{2}{15}\,\pi abc\,(b^2 + c^2)}{g\cdot\frac{\pi}{4}\,ab\,(b^2 - c^2)}} = \pi\sqrt{\frac{8c\,(b^2 + c^2)}{15g\,(b^2 - c^2)}},$$

$$\pi\sqrt{\frac{D}{g\rho\,(dV + B)}} = \pi\sqrt{\frac{\frac{2}{15}\,\pi abc\,(a^2 + c^2)}{g\cdot\frac{\pi}{4}\,ab\,(a^2 - c^2)}} = \pi\sqrt{\frac{8c\,(a^2 + c^2)}{15g\,(a^2 - c^2)}},$$

en als $a = b = 3c$ ware, dan zouden deze tijden gelijk zijn aan die der verticale slingeringen. Was $b = a = c$, dan worden dezelve oneindig groot, hetgeen zoo moet zijn, omdat in dit geval het ligchaam in eenen bol overgaat, die na eene kleine verplaatsing geene ronddraaijende beweging aanneemt.

*Aanmerking*. In het geval der stabiliteit zijn de formulen die men voor de ronddraaijende beweging verkregen heeft, geldig, omdat men bij de ontwikkeling derzelve van de onderstelling is uitgegaan, dat de grootheden $\theta_1$ en $\theta_2$ gedurende de beweging zeer klein blijven, en volgens die formulen zijn zij ook steeds tusschen de grenzen $-\alpha$ en $+\alpha$, en $-\beta$ en $+\beta$ ingesloten; is er echter geen stabiliteit, dan kunnen die formulen, namelijk (17) en (18), alleen geldig zijn voor de eerste oogenblikken der beweging; zij toonen dan ten duidelijkste aan, dat het ligchaam niet naar zijnen oorspronkelijken stand terugkeert, maar zich meer en meer van denzelven verwijdert.

## VRAAGSTUK G.

***Men kan oneindig veel ellipsen beschrijven die eene cycloïde in haren top raken, en waarvan eene as langs de as der cycloïde valt. Onder al die ellipsen begeert men diegene te vinden, welke het sterkst met de cycloïde ineensmelt.***

### OPLOSSING.

Wanneer men de vergelijking der cycloïde ten opzigte van bepaalde assen gekozen heeft, dan moet die der ellips ten opzigte

van dezelfde asse zoodanig bepaald worden, dat hare ligging aan de gestelde voorwaarde voldoende, 1°. voor de abscis die met den top der cycloïde overeenstemt, de ordinaat der ellips gelijk wordt aan die der cycloïde, en 2°. dat zoo veel achtereenvolgende differentiaal-quotiënten als mogelijk is, afgeleid uit de vergelijkingen der twee kromme lijnen, voor dit punt dezelfde waarde verkrijgen.

Neemt men nu de raaklijn aan den top der cycloïde voor as der $x$, en hare as als as der $y$, dan is hare vergelijking

$$x = \sqrt{\left\{2Ry - y^2\right)} + R\,Boog\left(Sin. = \sqrt{\frac{2Ry - y^2}{R^2}}\right),$$

waarin R den straal van den beschrijvenden cirkel aanduidt. Voor eene ellips, wier groote as $2a$ evenwijdig aan de raaklijn loopt, en wier kleine as $2b$ op de as der cycloïde valt, en die de cycloïde in den top aanraakt, heeft men

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1.$$

De vier eerste differentiaal-quotiënten zijn voor de cycloïde

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{\frac{y}{2R-y}},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{R}{(2R-y)^2},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{2R\sqrt{y}}{\sqrt{(2R-y)^7}},\ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{2R(R+3y)}{(2R-y)^5},$$

en voor de ellips

$$\frac{\partial y}{\partial x} = +\frac{b^2}{a^2}.\frac{x}{(b-y)},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{b^4}{a^2(b-y)^3},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{3b^6 x}{a^4(b-y)^5},$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{3b^6\left\{(b-y) - 5x\frac{\partial y}{\partial x}\right\}}{a^4(b-y)^6}.$$

Omdat nu bij de twee kromme lijnen voor $y=0$ ook $x=0$ wordt, en al de onevene differentiaal-quotiënten verdwijnen, zoo zoo kan men van de 2e en 4e dezer quotiënten gebruik maken, om de assen der ellips te bepalen, en er zal alsdan tusschen de ellips en de cycloïde eene zamensmelting van de 5e orde bestaan.

Stelt men in het 2e en 4e differentiaal-quotiënt van beide krommen $x$ en $y = 0$, en de waarden die zij daardoor verkrijgen aan elkander gelijk, dan heeft men

$$\frac{1}{4R} = \frac{b}{a^2},\quad \text{en}\quad \frac{1}{16R^3} = \frac{3b}{a^4},$$

waaruit $\quad a^4 = 16b^2R^2 = 48bR^3,$

dus $\quad b = 3R \quad \text{en} \quad a = 2R\sqrt{3}$

voor de assen der ellips, die het sterkst met de cycloïde ineensmelt. Deze eenvoudige uitkomsten zullen nader bevestigd worden door het vraagstuk meer algemeen op te lossen, met eene kromme lijn van den tweeden graad te zoeken, die in eenig punt der cycloïde het meest met haar ineensmelt. Uit de oplossing zal blijken dat die kromme voor elk punt eene ellips is, die echter niet meer een der assen op de normaal van het raakpunt heeft, maar die voor den top in de zoo even gevondene overgaat, zoodat deze zelfs wanneer de rigting der assen willekeurig genomen mogt worden, altijd diegene blijft, welke het sterkst met de cycloïde zamensmelt.

Nemen wij de coördinaten-assen aan als bij de voorgaande oplossing, dan blijft alles voor de cycloïde hetzelfde, maar de vergelijking der ineensmeltende kromme is dan

$$y^2 + Axy + Bx^2 + Cy + Dx + E = 0. \quad . \ (1)$$

en daar hierin vijf standvastigen bepaald moeten worden, zal men daartoe met deze vergelijking nog hare vier eerste differentiaal-quotiënten kunnen bezigen. Uit de vergelijking (1) heeft men, als $x$ voor onafhankelijke veranderlijke wordt aangenomen:

$$2y\frac{\partial y}{\partial x} + A\left\{y + x\frac{\partial y}{\partial x}\right\} + 2Bx + C\frac{\partial y}{\partial x} + D = 0,$$

$$2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + A\left\{2\frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\} + 2B + C\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

$$2y\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 6\frac{\partial y}{\partial x}.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + A\left\{3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right\} + C\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0,$$

$$2y\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 8\frac{\partial y}{\partial x}.\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 6\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + A\left\{4\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + x\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right\} + C\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0;$$

en vervangt men hierin de coördinaten en de differentiaal-quotiënten der gevraagde ineensmeltings-kromme door die van de cycloïde, ter bekorting

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{\frac{y}{2R - y}} = p, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{R}{(2R - y)^2} = q,$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{2R\sqrt{y}}{\sqrt{(2R-y)^7}} = r, \quad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{2R\,(R + 3y)}{(2R - y)^5} = s$$

stellende, dan heeft men om A, B, C, D en E te bepalen, de volgende vergelijkingen:

$$y^2 + Axy + Bx^2 + Cy + Dx + E = 0,$$
$$2yp + A(px + y) + 2Bx + Cp + D = 0,$$
$$2yq + 2p^2 + A(qx + 2p) + 2B + Cq = 0,$$
$$2yr + 6pq + A(rx + 3q) + Cr = 0,$$
$$2ys + 8pr + 6q^2 + A(sx + 4r) + Cs = 0.$$

Uit de twee laatsten vindt men gemakkelijk,

$$A = \frac{6q^2r}{3qs - 4r^2} - 2p, \quad C = 2(px - y) - \frac{6q^2(3q + xr)}{3qs - 4r^2},$$

vervolgens door substitutie dezer waarden in de 3e, 2e en 1e,

$$B = p^2 + \frac{3q^2(3q^2 - 2pr)}{3qs - 4r^2},$$

$$D = 2p(y - px) - \frac{6q^2(ry - 2prx - 3pq + 3q^2x)}{3qs - 4r^2},$$

$$E = (y - px)^2 + \frac{18q^3y + 6q^2rxy - 18pq^3x + 9q^4x^2 - 6pq^2rx^2}{3qs - 4r^2},$$

waardoor dus de zamensmeltende kromme geheel bepaald is.

Uit de gevondene waarden volgt verder

$$\tfrac{1}{4}A^2 - B = \frac{9q^4(5r^2 - 3qs)}{(3qs - 4r^2)^2},$$

of als men voor $p$, $q$, $r$ en $s$ derzelver waarden substitueert,

$$\tfrac{1}{4}A^2 - B = \frac{9R^2(y - 3R)}{2(2R - y)(3R + y)^2} = -\frac{9R^2(3R - y)}{2(2R - y)(3R + y)^2};$$

daar nu altijd $y < 2R$ is, zoo blijft $\frac{1}{4}A^2 - B$ voor elk punt der cycloïde negatief, en behoort alzoo de vergelijking (1), voor alle punten, tot eene ellips; als $y = 2R$ is wordt $\frac{1}{4}A^2 - B = -\infty$, en uit het volgende zal men zien dat alsdan de ellips in een enkel punt overgaat, omdat alsdan ook hare assen $= 0$ zijn.

Om de rakende ellips nader te bepalen, beginnen wij met de coördinaten van haar middelpunt te zoeken. Rangschikt men de algemeene vergelijking van den 2en graad, volgens de magten van een der coördinaten, bijv. van $y$, dan is zij van den vorm,

$$My^2 + Ny + P = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

en hieruit $y$ oplossende, heeft men

$$y = -\frac{N}{2M} \pm \sqrt{\left(\frac{N^2}{4M^2} - \frac{P}{M}\right)},$$

zoodat $y_1 = -\frac{N}{2M}$ het midden voorstelt van eene koorde, die

evenwijdig is aan de as der $y$, en de vergelijking

$$2My + N = 0,$$

tot het midden van al die koorden behoort en dus eene middellijn der ellips voorstelt. Men ziet dat zij het 1e differentiaal-quotiënt ten opzigte van $y$, van de vergelijking (A) is, en zoo zal het differentiaal-quotiënt ten opzigte van $x$, de middellijn bepalen, die bij de koorden behoort, welke evenwijdig loopen aan de as der $x$. Passen wij dit toe op de oorspronkelijke vergelijking

$$y^2 + Axy + Bx^2 + \text{enz.} = 0,$$

dan verkrijgen wij voor de vergelijkingen van twee middellijnen,

$$2y + Ax + C = 0,$$

$$Ay + 2Bx + D = 0,$$

en vinden hieruit voor de coördinaten ($x_1$ en $y_1$) van haar snijpunt, dat is, van het middelpunt der ellips

$$x_1 = \frac{AC - 2D}{4B - A^2},\quad y_1 = \frac{AD - 2BC}{4B - A^2},$$

of als men voor A, B, C en D de gevondene waarden substitueert,

$$x_1 = x + \frac{3qr}{5r^2 - 3qs},\quad y_1 = y + \frac{3q(rp - 3q^2)}{5r^2 - 3qs},$$

en verder wederom voor $p$, $q$, $r$ en $s$, derzelver waarden stellende,

$$x_1 = x + \frac{3(2R-y)^2}{y-3R}\sqrt{\frac{y}{2R-y}},\quad y_1 = y + \frac{3(2y-3R)(2R-y)}{2(y-3R)}.$$

Indien men tusschen deze vergelijkingen en die der cycloïde $x$ en $y$ elimineert, dan verkrijgt men eene vergelijking tusschen $x_1$ en $y_1$, dus die van de kromme lijn, gevormd door de middelpunten van alle rakende ellipsen, maar deze vergelijking wordt alsdan zeer zamengesteld en voor het verdere onderzoek onbruikbaar, zoodat wij die middelpunten, volgens eenen anderen weg, nader zullen bepalen. Vereenigt men namelijk het middelpunt eener ellips met haar raakpunt op de cycloïde, en noemt men den hoek, dien deze lijn maakt met de as der $x$, $\theta$, dan is

$$\textit{Tang.}\ \theta = \frac{y_1 - y}{x_1 - x};$$

dit wordt, ingevolge de bovenstaande waarden voor $x_1$ en $y_1$,

$$\textit{Tang.}\ \theta = \frac{2y - 3R}{2(2R - y)}\sqrt{\frac{2R - y}{y}},$$

of als men $\frac{\delta y}{\delta x} = p = \sqrt{\frac{y}{2R - y}} = \textit{Tang.}\ \phi$ stelt,

$$Tang.\ \theta = \frac{2y - 3R}{2\,(2R - y)} \times Cotang.\ \phi.$$

Stellende verder den hoek dien deze middellijn met de raaklijn maakt $= \psi$, dan is $\psi = \theta - \phi$,

en
$$Tang.\ \psi = \frac{Tang.\ \theta - Tang.\ \phi}{1 + Tang.\ \theta\ Tang.\ \phi},$$

of
$$Tang.\ \psi = \frac{\frac{2y - 3R}{2\,(2R - y)}\ Cot.\ \phi - Tang.\ \phi}{1 + \frac{2y - 3R}{2\,(2R - y)}}$$

$$= \frac{2y\,(Tang.\ \phi + Cot.\ \phi) - R\,(4\ Tang.\ \phi + 3\ Cot.\ \phi)}{R},$$

dat is $Tang.\ \psi = \frac{2y}{R\ Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi} - (4\ Tang.\ \phi + 3\ Cot.\ \phi),$

maar uit

$Tang.\ \phi = \sqrt{\frac{y}{2R - y}}$ volgt $Sin.\ \phi = \sqrt{\frac{y}{2R}}$ of $\frac{2y}{R} = 4\ Sin.^2\ \phi,$

waardoor $Tang.\ \psi$ overgaat in,

$Tang.\ \psi = 4\ Tang.\ \phi - (4\ Tang.\ \phi + 3\ Cot.\ \phi) = -\ 3\ Cot.\ \phi;$

door middel van deze eenvoudige uitkomst zal men gemakkelijk voor elk punt der cycloïde de rigting kunnen construëren van de middellijn, die door het raakpunt der cycloïde met de ellips gaat, en de halve lengte $\beta$ dezer middellijn wordt bepaald door

$$\beta = \sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}},$$

hetwelk geeft $\beta = \frac{3\,(2R - y)}{2\,(3R - y)} \sqrt{(9R^2 - 4Ry)};$

de toegevoegde van $\beta$ evenwijdig aan de raaklijn loopende, zoo is hare vergelijking $y' - y_1 = (x' - x_1)\ Tang.\ \phi$, welke, verbonden met de algemeene vergelijking der ellips, de coördinaten $x'_1$ en $y'_1$ van hare uiteinden zal bepalen. Stelt men hare halve lengte $= \alpha$, dan is blijkbaar $\alpha\ Cos.\ \phi = (x'_1 - x_1)$,

$$\alpha\ Sin.\ \phi = (y'_1 - y_1),$$

en dit in de vergelijking (1) overbrengende, zal men eene tweede magtsvergelijking vinden, waaruit $\alpha$ opgelost kan worden; en vooraf wetende, dat de waarden van $\alpha$ niet in grootte maar alleen in teekens verschillen, en dat dus de resulterende vergelijking alleen de tweede magt van $\alpha$ moet bevatten, kan men haren tweeden

term weglaten. De aangeduide substitutiën verrigtende, komt er

$$\alpha^2 \{Sin.^2 \phi + A\, Sin.\phi\, Cos.\phi + B\, Cos.^2 \phi\}$$
$$+ 2\alpha \{y_1\, Sin.\phi + \tfrac{1}{2} A (x_1\, Sin.\phi + y_1\, Cos.\phi)$$
$$+ Bx_1\, Cos.\phi + \tfrac{1}{2}(C\, Sin.\phi + D\, Cos.\phi)\}$$
$$+ y_1^2 + Ax_1y_1 + Bx_1^2 + Cy_1 + Dx_1 + E = 0,$$

of, omdat, zoo als daar even is opgemerkt, de coëfficiënt van $\alpha = 0$ is,

$$\alpha^2 (Sin.^2 \phi + A\, Sin.\phi\, Cos.\phi + B\, Cos.^2 \phi\}$$
$$+ (y_1^2 + Ax_1y_1 + Bx_1^2 + Cy_1 + Dx_1 + E = 0,$$

waaruit

$$\alpha = \pm \sqrt{-\frac{y_1^2 + Ax_1y_1 + Bx_1^2 + Cy_1 + Dx_1 + E}{Sin.^2 \phi + A\, Sin.\phi\, Cos.\phi + B\, Cos.^2 \phi}};$$

de teller van deze uitdrukking kan nog vereenvoudigd worden, als men in aanmerking neemt dat $x_1$ en $y_1$ voldoen aan de vergelijkingen

$$2y_1 + Ax_1 + C = 0,$$
$$Ay_1 + 2Bx_1 + D = 0,$$

waaruit door de eerste met $y_1$ en de tweede met $x_1$ te vermenigvuldigen en de som der producten te nemen volgt,

$$2y_1^2 + 2Ax_1y_1 + 2Bx_1^2 + Cy_1 + Dx_1 = 0,$$

of $y_1^2 + Ax_1y_1 + Bx_1^2 + Cy_1 + Dx_1 + E = \tfrac{1}{2}(Cy_1 + Dx_1 + E)$,

waardoor $\alpha$ overgaat in

$$\alpha = \pm \sqrt{-\frac{Cy_1 + Dx_1 + E}{2\,(Sin.^2 \phi + A\, Sin.\phi\, Cos.\phi + B\, Cos.^2 \phi)}},$$

of, als men voor A, B, C, D en E hunne waarden substitueert, dan zal men na herleiding vinden

$$\alpha = \frac{3\,(2R - y)}{3R - y} \sqrt{R\,(3R - y)}.$$

Hierdoor is nu alles gevonden, wat noodig is om de rakende ellips voor elk bijzonder punt der cycloïde te kunnen construeren; er is gevonden voor den hoek dien de middellijn der ellips, welke door het raakpunt gaat, maakt met de raaklijn $Tang.\psi = -3\, Cot.\phi$, voor den top is $\phi = 0$, $Cot.\psi = \infty$, dus $Tang.\psi = -\infty$ en $\psi = 270°$; aanwijzende dat in dit punt de middellijn loodregt is op de raaklijn, en dus een der assen is; voor de halve lengte der twee middellijnen heeft men

$$\alpha = \frac{3\,(2R - y)}{3R - y} \sqrt{R\,(3R - y)},\ \beta = \frac{3\,(2R - y)}{2\,(3R - y)} \sqrt{(9R^2 - 4Ry)},$$

en voor $y = 0$ is dus $\alpha = 2R\sqrt{3} = a$, $\beta = 3R = b$; dit stemt overeen met het vroeger gevondene, en de constructie der ellips, die in den top der cycloïde het meest met haar te zamensmelt, is dus als volgt: in fig. 22 is eene cycloïde geteekend, waarvan AO de as of de middellijn van den beschrijvenden cirkel is; OX, raaklijn aan den top, is de as der $x$, en OB die der $y$; maakt men nu AB gelijk aan den straal van den beschrijvenden cirkel, dan is $OB = 3R$ en alzoo B het middelpunt en OB eene halve as der ellips; beschrijf verder op OB eenen halven cirkel, door A eene loodlijn op OB en trek BC, dan is $BC = \sqrt{AB \times OB} = R\sqrt{3}$; trek AD loodregt op BC of evenwijdig aan OC, dan is $CD = \frac{2}{3} R\sqrt{3}$; stelt men dus door B eene loodlijn op OB en maakt men $BE = 3 \times CD = 2BC = 2R\sqrt{3}$, zoo is daardoor de tweede as der ellips bepaald, en deze kan dus verder door punten geconstrueërd worden. Voor eenig ander punt der cycloïde is de constructie meer zamengesteld. Trek vooreerst door het punt M de raaklijn aan de cycloïde, zij loopt evenwijdig aan de koorde OG van den beschrijvenden cirkel; maak $\angle$ N′MP zoodanig, dat $Tang.\,N'MP = -3\,Cot.\,\phi$ of $Tang.\,PML' = 3\,Cot.\,GOX$; dit geschiedt door AG te verlengen totdat $GH = 3AG$ is, H met O te vereenigen en uit M eene lijn MP te trekken evenwijdig aan OH, want dan is $L'MP = GOH$ en $Tang.\,GOH = \frac{GH}{OG} = \frac{3AG}{OG} = 3\,Tang.\,BOG$.

Verder is in de figuur

$$2R - y = AF,\ 3R - y = BF,\ FG = \sqrt{(2Ry - y^2)},$$
$$BG^2 = BF^2 + FG^2 = 9R^2 - 4Ry,$$

dus $$\beta = \frac{3(2R - y)}{2(3R - y)} \sqrt{(9R^2 - 4Ry)} = \frac{3}{2} \times \frac{GB \times AF}{BF} = \frac{3}{2}\,GI.$$

Zet men dus op MP van het punt M af, de helft van GI drie maal uit, dan vindt men het middelpunt P der ellips en is PM eene van hare halve middellijnen; de toegevoegde loopt door P evenwijdig aan de raaklijn; om hare grootte te bepalen, beschrijft men op BF eenen halven cirkel, trekt BK en hierop uit A eene loodlijn AL; deze evenwijdig zijnde aan FK, zoo heeft men

$$KL : KB = AF : BF,$$

of $$KL : \sqrt{R\,(3R - y)} = 2R - y : 3R - y,$$

dus $$KL = \frac{2R - y}{3R - y} \sqrt{R\,(3R - y)} = \frac{1}{3}\,\alpha,$$

of $\alpha = 3KL$; waardoor dus de beide toegevoegde middellijnen in grootte en rigting bepaald zijn, en de ellips verder geconstrueerd kan worden.

Door deze constructie voor een aantal punten der cycloïde te herhalen, zal men de kromme lijn, die gevormd wordt door de middelpunten der rakende ellipsen, bij benadering kunnen construeren. Voor het hoogste punt T der cycloïde is $y = 2R$, waardoor $\alpha = \beta = 0$ wordt, en tevens is voor dat punt $Tang.\ \psi = -3\ Cot.\ \phi = 0$; hieruit volgt, dat de kromme lijn der middelpunten de cycloïde in de hoogste punten (T) aanraakt; zij raakt ook de as aan in het punt B, en uit de vergelijking $Tang.\ \psi = -3\ Cot.\ \phi$ kan men nu opmaken, dat zij steeds de bolle zijde naar de as der $x$ keert; want voor den top O is de hoek $\psi$ regt en wordt hij steeds grooter, wanneer men van daar naar T gaat; tevens wordt $\beta$ steeds kleiner, en de kromme zal dus van B af aan steeds de as der $x$ naderen, totdat zij in R, waar $\beta$ evenwijdig is aan die as, haar laagste punt bereikt heeft, daarna zal zij zich weder van die as verwijderen, zonder dat R een keerpunt is. Het punt R, waar dit plaats heeft, kan bepaald worden, door in de vergelijking

$$Tang.\ \psi = -3\ Cot.\ \phi$$

te stellen $\psi = 180 - \phi$, waardoor men verkrijgt $Tang.\ \phi = 3\ Cot.\ \phi$,

$$Tang.\ \phi = \sqrt{3}, \text{ dus } \phi = 60^\circ, \text{ of ook } Tang.\ \phi = \sqrt{\frac{y}{2R - y}} = \sqrt{3},$$

waaruit $y = \frac{3}{2} R$.

Ditzelfde punt zullen wij nog op eene andere wijze terugvinden, door op te merken, dat de kromme hare bolronde zijde naar de as der $x$ keert, als zij tusschen B en T slechts één *minimum* voor $y_1$ geeft.

Men heeft in het voorgaande voor $y_1$ gevonden

$$y_1 = y + \frac{3\ (2y - 3R)\ (2R - y)}{2\ (y - 3R)},$$

tusschen 0 en 2R neemt $y$ met oneindig kleine verschillen toe, men mag haar dus als onafhankelijk veranderlijk beschouwen, zoodat men, ter bepaling van het *minimum* voor $y_1$, $\frac{\partial y_1}{\partial y} = 0$ stellende, heeft

$$\frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{-4y^2 + 24Ry - 27R^2}{2\ (y - 3R)} = 0,$$

waaruit men zal vinden $y = \frac{3}{2}$ R, of $y = \frac{9}{2}$ R, waarvan het eerste het *minimum* aanwijst, terwijl de tweede waarde onbestaanbaar is, omdat bij de cycloïde *steeds* $y < 2$R dient te zijn. Dat $y = \frac{3}{2}$R werkelijk een *minimum* aanwijst, zal men vinden door deze waarde in $\frac{\partial^2 y_1}{\partial y^2}$ te substitueeren, waardoor dit tweede differentiaal-quotient positief wordt. Verder is het *minimum* van $y_1$, $y_1 = y$, zoo als ook, uit de beschouwing der figuur, dit gevonden wordt.

Indien men niet de middelpunten der rakende ellipsen bepaalt, maar alleen de rigtingen trekt der middellijnen $\beta$, dan wordt door de snijding van elke twee achtereenvolgende rigtingen een veelhoek bepaald, die de kromme lijn der middelpunten overal aanraakt, en waarvan deze kromme de limiet is, zoodat men, door een groot aantal van zulke rigtingen te trekken, die kromme lijn van zelven verkrijgt.

Omdat de zamensmelting van de ellips en de cycloïde van de 4e orde is en alzoo de 5e differentiaal-quotienten van beide kromme lijnen een eindig verschil hebben, zal de ellips aan de eene zijde van het raakpunt binnen en aan de andere zijde buiten de cycloïde vallen; voor den top is nog bovendien bij beiden het 5e differentiaal-quotient gelijk nul, en de zamensmelting daarom van de 5e orde, terwijl de ellips aldaar de cycloïde geheel omvat. Dit blijkt uit hare vergelijking; want die is, zoo als men gesteld heeft

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-b)^2}{b^2} = 1,$$

of hierin $a = 2\mathrm{R}\sqrt{3}$ en $b = 3\mathrm{R}$ stellende,

$$\frac{x^2}{12\mathrm{R}^2} + \frac{(y-3\mathrm{R})^2}{9\mathrm{R}^2} = 1.$$

Stelt men nu $y = 2\mathrm{R}$, dan wordt $x = \frac{4}{3}\mathrm{R}\sqrt{6}$, terwijl men bij de cycloïde voor dezelfde waarde van $y$ heeft $x = \pi\mathrm{R}, = \mathrm{AT}$; de abscis der ellips, die op de bazis der cycloïde valt, zal dus grooter zijn, dan de halve bazis AT, en het verschil bedraagt

$$\mathrm{R}\left(\tfrac{4}{3}\sqrt{6} - \pi\right) = 0.124\ldots.\mathrm{R},$$

waaruit men ligtelijk inziet, dat de elliptische boog voor een aanmerkelijk gedeelte der cycloïde weinig van de cycloïde zal afwijken, vooral als de straal van den beschrijvenden cirkel niet zeer groot is.

Dit is ook de reden, waarom men in de figuur geene rakende ellips geteekend heeft; men had dezelve dan naar eene grootere schaal moeten teekenen, om de afwijking der kromme lijnen duidelijk zigtbaar te maken.

# OPLOSSINGEN

VAN TWEE

ALS PRIJSVRAGEN VOORGESTELDE

# VRAAGSTUKKEN,

VOOR WELKER BEANTWOORDING, TER ALGEMEENE VERGADERING VAN DEN JARE 1840, AANLAGEN TER BEHALING VAN EENEN PRIJS ZIJN TOEGEKEND AAN HET LID DES GENOOTSCHAPS

**P. H. VAN DER MEULEN.**

## VRAAGSTUK H.

*Drie bollen liggen op een horizontaal vlak; men vraagt de Beschrijvende Meetkunst toe te passen, tot het vinden van eenen vierden bol, die mede op dat horizontale vlak ligt, en de drie eerstgenoemde bollen uitwendig raakt. Bij de oplossing behoort het onderzoek gevoegd te worden, van de gevallen waarin zij onmogelijk zou worden.*

### OPLOSSING.

Laten de lijn AB (Fig. 23) en de cirkel PT elkander in het punt T raken, dan is de meetkunstige plaats der cirkels, die de lijn AB en tevens den cirkel PT uitwendig raken, eene parabool, waarvan de top in T valt, die het middelpunt F van den cirkel PT tot brandpunt heeft, en welker parameter alzoo gelijk aan tweemaal de middellijn van den cirkel PT is.

Om dit aan te toonen trekke men uit F eene willekeurige lijn FM, en uit het punt R waar deze lijn den omtrek des cirkels PT snijdt, eene andere lijn RV loodregt op AB; deze RV, die men van willekeurige lengte neemt, zette men op RF uit, zoodat

RU = RV worde; daarna vereenige men de punten U en V, trekke RS evenwijdig met UV en stelle uit het punt S, waar RS de lijn AB ontmoet, eene loodlijn op AB; dan zal het snijpunt M van de laatstgenoemde loodlijn met de eerst getrokkene lijn FM, het middelpunt zijn van eenen cirkel, die den cirkel PT uitwendig in R, en die tevens de lijn AB in S raakt. Want omdat RU = RV is, zal ook MR = MS zijn.

Stellende nu TS $= x$, MS $= z$ en FT $= r$, en trekkende MN evenwijdig met AB, zoo is:

$$FM = FR + MR = FT + MS = r + z,$$
$$FN = FT - NT = FT - MS = r - z,$$

dus $x^2 = MN^2 = FM^2 - FN^2 = (r + z)^2 - (r - z)^2$

of $$x^2 = 4rz; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waardoor het gestelde bewezen is, en waardoor tevens een middel aan de hand wordt gegeven, om van de bedoelde parabool zoo vele punten M te construeren, als men goedvindt.

Wanneer nu de geheele figuur om de lijn PT omwentelt, beschrijft de regte lijn AB een plat vlak, de cirkel PT eenen bol, en de parabool GTG′ eene omwentelingsparaboloïde; en het is duidelijk dat het oppervlak dier omwentelingsparaboloïde alsdan de meetkunstige plaats zal zijn van de middelpunten der bollen, die het genoemde platte vlak en den daarop rustenden bol uitwendig raken. Indien de cirkel PT de verticale projectie van eenen bol, en AB de as van projectie ware, is het even duidelijk, dat GTG′ de verticale projectie zou zijn van eene parabool, wier vlak evenwijdig met het verticale is, en die men om hare as zou moeten laten wentelen, ten einde de paraboloïde te verkrijgen, wier oppervlak de meetkunstige plaats is van de middelpunten der bollen, die gelijktijdig den eerstgenoemden bol en het horizontale vlak raken.

Ingevolge deze opmerking, komt dan de oplossing van het vraagstuk hierop neder:

Laten A′, B′, C′ (Fig. 24) de horizontale en A″, B″, C″ de verticale projectiën zijn van de middelpunten der gegevene bollen, wier stralen alzoo in grootte voorgesteld worden door A″a, B″b, C″c; dan kan men vooreerst de drie omwentelingsparaboloïden construeren, die respectievelijk de meetkunstige plaatsen bevatten van de middelpunten der bollen, rakende een der gegevene bollen en het

horizontale vlak. Daar deze paraboloïden, die wij gemakshalve A, B en C zullen noemen, hare toppen in de punten A′, B′, en C′ hebben, wordt tot derzelver constructie alleen vereischt, dat men even als in Fig. 23 de verticale projectiën der omwentelende parabolen construere.

Vervolgens kan men de doorsneden dezer drie omwentelingsparaboloïden twee aan twee construeren. Hiertoe bezige men snijdende platte vlakken, evenwijdig met het horizontale vlak. Zulk een vlak snijdt de beide omwentelingsparaboloïden, A en B b. v., wier doorsnede men construeren wil, volgens twee cirkels, die zich in hunne ware grootte op het horizontale vlak projecteren, en waarvan de stralen onmiddellijk uit de verticale projectiën der omwentelende krommen gevonden worden; de horizontale projectiën dier beide cirkels kunnen dus dadelijk met deze stralen, uit de punten A′ en B′ als middelpunten, beschreven worden, en derzelver snijpunten zijn dan de horizontale projectiën van twee tot de doorsnede der paraboloïden A en B behoorende punten, welker verticale projectiën men mede dadelijk vinden kan, omdat hunne hoogte, en de hoogte van het gebezigde snijdende vlak boven het horizontale, dezelfde zijn. Door op deze wijze een genoegzaam aantal snijdende vlakken te gebruiken, verkrijgt men met genoegzame naauwkeurigheid de projectiën van de doorsnede der paraboloïden A en B; evenzoo die der paraboloïden A en C, of B en C. Wij achten het onnoodig, de uitvoering dezer constructie nog nader te omschrijven. In Fig. 24 zijn er de uitkomsten van voorgesteld, zoodat de kromme lijnen, aldaar door het beurtelings gebruiken van stippen en streepjes aangewezen, de projectiën van de doorsneden der paraboloïden twee aan twee verbeelden; wordende in die figuur de horizontale projectiën van alle drie die doorsneden, doch slechts de verticale projectiën van twee derzelven gevonden, namelijk van de paraboloïden A en C en van de paraboloïden B en C.

De punten (O′, O″) en ($O'_1$, $O''_1$) nu, waarin weder deze doorsneden elkander snijden, zijn aan de oppervlakken der drie omwentelingsparaboloïden gemeen; die punten zijn derhalve de middelpunten van bollen, die de drie gegevene bollen en het horizontale vlak raken, en die alzoo aan de vraag voldoen; terwijl verder de afstanden O″o en $O''_1 o_1$ van de verticale projectiën

$O''$ en $O''_1$ tot de as, de werkelijke grootten van de stralen dier begeerde bollen zijn.

Mogten de geconstrueerde doorsneden der paraboloïden twee aan twee, geene gemeenschappelijke punten verkrijgen, dan zou hieruit blijken, dat ook de drie oppervlakken geene punten gemeen hadden, en dat er alzoo geen bol is, die in dat geval aan de vraag voldoet.

Ten aanzien van de doorsneden der omwentelingsparaboloïden twee aan twee, merken wij op, dat hare horizontale projectiën cirkels zijn; zoo als gemakkelijk valt aan te toonen.

Nemen wij namelijk drie onderling regthoekige coördinaten-assen aan, zoodanig dat het horizontale vlak dat der $xy$, en de as van projectie de as der $x$ is; indien dan $\alpha$ en $\beta$ de coördinaten van den top $A'$ der paraboloïde A zijn, en $A''a = r$ gesteld wordt, blijkt uit (1) gemakkelijk, dat het oppervlak dier paraboloïde tot vergelijking heeft

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = 4rz; \quad \ldots \ldots (a)$$

desgelijks behoort de vergelijking

$$(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 = 4r'z. \quad \ldots \ldots (b)$$

tot het oppervlak der paraboloïde B, waarin $\alpha'$ en $\beta'$ de coördinaten van haren top $B'$ verbeelden, terwijl $B''b = r'$ is. Kennen wij nu in de vergelijking ($a$) aan $x$, $y$ en $z$ dezelfde waarden toe als in de vergelijking ($b$), dan behooren deze coördinaten tot de gemeene doorsnede der beide paraboloïden; elimineren wij dus $z$ tusschen de vergelijkingen ($a$) en ($b$), hetgeen onmiddellijk geschiedt door die vergelijkingen in elkander te deelen, dan komt er, voor de vergelijking van de horizontale projectie der gemeene doorsnede,

$$\frac{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}{(x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2} = \frac{r}{r'};$$

maar deze vergelijking laat zich gemakkelijk herleiden tot

$$x^2 + y^2 - 2\,\frac{r\alpha' - r'\alpha}{r - r'}\,x - 2\,\frac{r\beta' - r'\beta}{r - r'}\,y =$$

$$= \frac{r'(\alpha^2 + \beta^2) - r(\alpha'^2 + \beta'^2)}{r - r'}, \quad \ldots \ldots (2)$$

en zij blijkt dan onmiddellijk tot eenen cirkel te behooren, omdat zij van den tweeden graad is, geenen term met het product $xy$ bevat, en hare termen $x^2$ en $y^2$ denzelfden coëfficiënt hebben.

Hieruit volgt dat men van de horizontale projectiën van de doorsneden der paraboloïden, slechts drie punten voor elke doorsnede behoeft te construeren; een cirkel door deze drie punten gebragt zal dan de geheele projectie dier doorsnede zijn. Heeft men door de snijding van twee dezer cirkels de punten $O'$ en $O'_1$ gevonden, dan zal men slechts de verticale projectie van ééne doorsnede van twee onzer paraboloïden behoeven te construeren, om ook de punten $O''$ en $O''_1$ te vinden.

Beschouwen wij thans ons vraagstuk uit een analytisch oogpunt, waarbij dan tevens blijken zal, hoe de middelpunten en stralen van de laatstgenoemde cirkels kunnen gevonden worden.

Fig. 25 is eene perspectivische voorstelling van den betrekkelijken stand van de gegevene bollen, rakende het horizontale vlak in de punten $A'$, $B'$ en $C'$, en van den gevraagden bol, rakende het horizontale vlak in het punt $O'$; terwijl A, B, C en O respectievelijk de middelpunten dier bollen verbeelden. Laat nu, door het middelpunt van den laatstgenoemden bol en door de middelpunten der gegevene bollen, drie verticale vlakken gebragt worden, dan zullen deze de bovengemelde paraboloïden, volgens beschrijvende parabolen $A'O$, $B'O$ en $C'O$ snijden. De stralen der bollen A, B en C achtervolgens $r$, $r'$ en $r''$ noemende, zullen de parameters der overeenkomstige parabolen $A'O$, $B'O$ en $C'O$, volgens het boven bewezene $4r$, $4r'$ en $4r''$ zijn, zoodat men, OG, OH en OI respectievelijk loodregt op $AA'$, $BB'$ en $CC'$ zijnde, hebben zal

$$OG^2 = 4r \times A'G,\quad OH^2 = 4r' \times B'H \quad \text{en} \quad OI^2 = 4r'' \times C'I;$$

maar nu is

$$OG = O'A',\quad OH = O'B' \quad \text{en} \quad OI = O'C',$$

terwijl men, den straal $OO'$ van den gevraagden bol $R$ noemende, ook heeft

$$A'G = R,\quad B'H = R \quad \text{en} \quad C'I = R;$$

derhalve is dan

$$O'A'^2 = 4rR,\quad O'B'^2 = 4r'R \quad \text{en} \quad O'C'^2 = 4r''R,$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$O'A'^2 : O'B'^2 : O'C'^2 = r : r' : r'',$$

zoodat het raakpunt $O'$ van den te vinden bol met het horizontale vlak, bepaald wordt door de eigenschap, dat de vierkanten van deszelfs afstanden, tot de raakpunten $A'$, $B'$ en $C'$ der ge-

gevene bollen met het horizontale vlak, evenredig zijn met de stralen van die bollen.

Zijn de afstanden van de middelpunten der gegevene bollen bekend, dan kent men ook de afstanden van hunne raakpunten met het horizontale vlak; stelt men namelijk
$BC = A$, $CA = B$, $AB = C$, $B'C' = a$, $C'A' = b$ en $A'B' = c$,
dan volgt uit de figuur onmiddellijk:

$$a = \sqrt{\{A^2 - (r' - r'')^2\}},$$
$$b = \sqrt{\{B^2 - (r - r'')^2\}},$$
$$c = \sqrt{\{C^2 - (r - r')^2\}},$$

en tot de analytische oplossing der vraag komt het er dus slechts op aan, de afstanden $O'A'$, $O'B'$ en $O'C'$ in eene functie van de stralen der gegevene bollen en van de bekende afstanden $a$, $b$ en $c$ te vinden; wordende dan verder voor $R$, uit de reeds aangevoerde vergelijkingen, gevonden

$$R = \frac{O'A'^2}{4r} = \frac{O'B'^2}{4r'} = \frac{O'C'^2}{4r''}.$$

Beginnen wij met de meetkunstige plaats te bepalen van al de punten $O'$ (Fig. 26), die zoodanig ten opzigte van twee vaste punten $A'$ en $B'$ gelegen zijn, dat de vierkanten der afstanden $O'A'$ en $O'B'$ standvastig tot elkander staan als $r$ tot $r'$. Nemende hiertoe het punt $A'$ als oorsprong van onderling regthoekige coördinaten, en de lijn $A'B'$ als as van abscissen aan, zoodat $A'Q = x$ en $O'Q = y$ de coördinaten van het punt $O'$ zijn, dan is

$$O'A'^2 : O'B'^2 = r : r',$$

dat is: $A'Q^2 + O'Q^2 : B'Q^2 + O'Q^2 = r : r'$,

of $x^2 + y^2 : (c - x)^2 + y^2 = r : r'$,

waaruit na behoorlijke herleiding gevonden wordt

$$x^2 + y^2 - 2\frac{rc}{r - r'}x = -\frac{rc^2}{r - r'}; \quad . \quad . \quad (3)$$

hieruit blijkt, dat de gezochte meetkunstige plaats een cirkel is, en wel dezelfde cirkel, dien wij boven vonden tot horizontale projectie van de doorsnede der beide paraboloïden, wier toppen in $A'$ en $B'$ vallen. Want stellen wij, in de vergelijking (2), $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha' = c$ en $\beta' = 0$, ten einde ook daar den oorsprong in het punt $A'$ en de as der $x$ door het punt $B'$ te brengen, dan gaat die vergelijking (2) juist in de laatstgevondene vergelijking (3)

over. Door bij elk lid derzelve het vierkant van den halven coëfficiënt van $x$ op te tellen, kan men haar schrijven in den vorm

$$\left\{x - \frac{rc}{r - r'}\right\}^2 + y^2 = \left\{\frac{c\sqrt{rr'}}{r - r'}\right\}^2,$$

waaruit dan blijkt, dat de cirkel, dien zij voorstelt, $\frac{c\sqrt{rr'}}{r - r'}$ tot straal heeft, en dat het middelpunt diens cirkels in de lijn A′B′ of haar verlengde op den afstand $\frac{rc}{r - r'}$ van het punt A′ gelegen is. Indien dus M het middelpunt van dezen cirkel voorstelt, heeft men

$$A'M = \frac{rc}{r - r'}.$$

Om dezen cirkel te construeren, kan men op de volgende wijze te werk gaan. Beschrijft men namelijk op eene lijn, gelijk aan de som der stralen $r$ en $r'$, eenen halven cirkel (Fig. 27), stelt men uit het punt waar deze stralen zamengevoegd zijn eene loodlijn op de middellijn, en vereenigt men het punt, waar deze loodlijn den omtrek ontmoet, met de uiteinden der middellijn, dan verkrijgt men twee koorden $k$ en $k'$, die tot elkander staan als $\sqrt{r}$ tot $\sqrt{r'}$. Rigt men nu (Fig. 26) uit A′ en B′ loodlijnen op A′B′ op, die respectievelijk gelijk aan $k$ en $k'$ zijn, (en wel uit een dezer punten, b. v. uit A′, aan weerszijden) dan zal men slechts de toppen dezer loodlijnen behoeven te vereenigen, om, door de snijding der vereenigingslijnen met de lijn A′B′ en haar verlengde, twee punten P en P′ te vinden, die tot den verlangden cirkel behooren; want volgens deze constructie is

$$A'P : B'P = k : k' = \sqrt{r} : \sqrt{r'}; \quad A'P' : B'P' = k : k' = \sqrt{r} : \sqrt{r'}$$

of $$A'P^2 : B'P^2 = A'P'^2 : B'P'^2 = r : r';$$

en daar nu het middelpunt M van den verlangden cirkel, even als zijne punten P en P′, op de lijn A′B′ of haar verlengde moet liggen, zal een cirkel op PP′ als middellijn beschreven, de begeerde zijn.

Het is duidelijk, dat men op gelijke wijze den cirkel kan construeren, welks omtrek de meetkunstige plaats is van de punten, die de eigenschap hebben, dat de vierkanten hunner afstanden tot de punten A′ en C′ evenredig zijn met $r$ en $r''$; dat deze cirkel dan weder de horizontale projectie zal zijn van de doorsnede der beide paraboloïden, die A′ en C′ tot toppen hebben; en dat

deze tweede cirkel, door zijne snijding met den op PP′ beschrevenen, de begeerde punten O′ of $O'_1$ zal doen kennen.

Daar wij echter deze snijpunten analytisch wenschen te bepalen, zullen wij ook van dien tweeden cirkel de vergelijking, ten opzigte der reeds aangenomene assen, opmaken. Laten alzoo $A'N = m$ en $C'N = n$ de coördinaten van het bekende punt C′ zijn, als wanneer men heeft

$$2cm = b^2 + c^2 - a^2 \quad \text{en} \quad m^2 + n^2 = b^2,$$

dan is hier $O'A'^2 : O'C'^2 = r : r''$,

dat is: $A'Q^2 + O'Q^2 : C'S^2 + O'S^2 = r : r''$,

of $x^2 + y^2 : (n - y)^2 + (m - x)^2 = r : r''$,

waaruit na behoorlijke herleiding, en door $b^2$ in plaats van $m^2 + n^2$ te schrijven, gevonden wordt de vergelijking

$$x^2 + y^2 - 2\frac{rm}{r - r''}x - 2\frac{rn}{r - r''}y = -\frac{rb^2}{r - r''}, \quad (4)$$

welke tot den bedoelden tweeden cirkel behoort. Bij hare leden optellende $\left(\frac{rm}{r - r''}\right)^2 + \left(\frac{rn}{r - r''}\right)^2 = \left(\frac{rb}{r - r''}\right)^2$, wordt zij na herleiding

$$\left\{x - \frac{rm}{r - r''}\right\}^2 + \left\{y - \frac{rn}{r - r''}\right\}^2 = \left\{\frac{b\sqrt{rr''}}{r - r''}\right\}^2;$$

deze cirkel heeft dus $\frac{b\sqrt{rr''}}{r - r''}$ tot straal, en zoo M′ zijn middelpunt voorstelt, zijn de coördinaten van dat punt, hetwelk noodzakelijk op het verlengde van A′C′ moet liggen,

$$A'E = \frac{rm}{r - r''} \quad \text{en} \quad EM' = \frac{rn}{r - r''}.$$

Ten overvloede kan men nog den cirkel beschouwen, welks omtrek de meetkunstige plaats is van de punten, die de eigenschap hebben, dat de vierkanten hunner afstanden tot de punten B′ en C′ evenredig zijn met $r'$ en $r''$; de straal en het middelpunt van dezen derden cirkel kunnen volmaakt op dezelfde wijze als die van tweeden bepaald worden; zoodat zijn straal blijkbaar is $\frac{a\sqrt{r'r''}}{r' - r''}$, terwijl men voor de coördinaten van zijn middelpunt M″ zal vinden

$$A'F = \frac{r'm - r''c}{r' - r''} \quad \text{en} \quad FM'' = \frac{r'n}{r' - r''},$$

zijnde dit middelpunt wederom op het verlengde van B'C' gelegen.

Deze derde cirkel zal natuurlijk door de snijpunten O' en $O'_1$ der twee eerste cirkels moeten gaan, waarmede in verband staat, dat de drie middelpunten M, M' en M″ in eene regte lijn liggen. Deze laatste omstandigheid kan overigens uit de reeds berekende waarden blijken; immers is

$$EM = A'M - A'E = \frac{rc}{r-r'} - \frac{rm}{r-r''} = \frac{r}{r-r'} \times \frac{(r-r'')c-(r-r')m}{r-r''},$$

$$FM = A'M - A'F = \frac{rc}{r-r'} - \frac{r'm-r''c}{r'-r''} = \frac{r'}{r-r'} \times \frac{(r-r'')c-(r-r')m}{r'-r''},$$

en dus $$EM : FM = \frac{r}{r-r''} : \frac{r'}{r'-r''};$$

maar uit $$EM' = \frac{rn}{r-r''} \quad \text{en} \quad FM'' = \frac{r'n}{r'-r''},$$

volgt almede $$EM' : FM'' = \frac{r}{r-r''} : \frac{r'}{r'-r''},$$

en derhalve is $$EM : FM = EM' : FM'',$$

welke evenredigheid niet bestaan kan, tenzij de punten M, M' en M″ in eene regte lijn gelegen zijn.

Ter bepaling nu der punten O' en $O'_1$, die de snijpunten zijn der cirkels, door de vergelijkingen (3) en (4) voorgesteld, hebben wij slechts die vergelijkingen ten opzigte van $x$ en $y$ op te lossen. De waarden, die hierdoor voor $x$ en $y$ gevonden worden, zijn dan de coördinaten der genoemde punten. Trekken wij aanvankelijk de vergelijkingen (3) en (4) van elkander af, dan verkrijgen wij, na deeling door $r$,

$$2\left\{\frac{c}{r-r'} - \frac{m}{r-r''}\right\}x - 2\frac{n}{r-r''}y = \frac{c^2}{r-r'} - \frac{b^2}{r-r''}, \quad . \ (5)$$

hetgeen de vergelijking is der regte lijn, die door de punten O' en $O'_1$ gaat; er blijft dan over, de waarden van $x$ en $y$ uit de vergelijkingen (3) en (5) op te lossen. Stellen wij daartoe gemakshalve

$$r - r' = d'', \quad r' - r'' = d \quad \text{en} \quad r'' - r = d',$$

dan verkrijgen die vergelijkingen, na verdrijving der breuken, de meer eenvoudige vormen

$$d''(x^2 + y^2) - 2rcx = -rc^2. \ . \ . \ . \ . \ (6)$$

en $$2(cd' + md'')x + 2nd''y = c^2d' + b^2d''. \ . \ . \ (7)$$

Zoo wij nogmaals ter bekorting stellen

$$cd' + md'' = g \quad \text{en} \quad c^2d' + b^2d'' = 2h,$$

volgt uit (7) onmiddellijk

$$y = \frac{h - gx}{nd''}; \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

deze waarde van $y$ in (6) overbrengende, komt er

$$d''\left\{x^2 + \frac{(h-gx)^2}{n^2d''^2}\right\} - 2rcx = -rc^2,$$

of na behoorlijke herleiding

$$x^2 - 2\frac{gh + rcn^2d''}{g^2 + n^2d''^2}x + \frac{h^2 + rc^2n^2d''}{g^2 + n^2d''^2} = 0;$$

hieruit $x$ oplossende, vinden wij

$$x = \frac{gh + rcn^2d'' \pm n\sqrt{d''\{grc(2h-gc) + rc^2n^2d''(r-d'') - h^2d''\}}}{g^2 + n^2d''^2},$$

waarvoor wij, omdat $2h - gc = c^2d' + b^2d'' - c(cd' + md'') = (b^2 - cm)d''$ en $r - d'' = r'$ is, ook kunnen schrijven

$$x = \frac{gh + rcn^2d'' \pm nd''\sqrt{\{rgc(b^2-cm) + rr'c^2n^2 - h^2\}}}{g^2 + n^2d''^2}; \quad (9)$$

en brengen wij deze waarde voor $x$ in (8) over, dan komt er na herleiding

$$y = \frac{hnd'' - rgcn \mp g\sqrt{\{rgc(b^2-cm) + rr'c^2n^2 - h^2\}}}{g^2 + n^2d''^2} \quad (10)$$

Door middel dezer formulen (9) en (10) kan nu de waarde van $O'A'^2 = x^2 + y^2$ gevonden worden; gemakkelijker echter is het uit (6) af te leiden,

$$x^2 + y^2 = \frac{rc(2x - c)}{d''},$$

en hierin voor $x$ de waarde (9) over te brengen; wij vinden dan vooreerst

$$2x - c = \frac{g(2h - gc) + cn^2d''(2r - d'') \pm 2nd''\sqrt{\{\ldots\ldots\}}}{g^2 + n^2d''^2};$$

verder $2h - gc = (b^2 - cm)d''$ substitueerende, wordt de teller door $d''$ deelbaar, zoodat wij, tevens opmerkende dat $2r - d'' = 2r - (r - r') = r + r'$ is, verkrijgen

$$\frac{2x - c}{d''} = \frac{g(b^2-cm) + cn^2(r+r') \pm 2n\sqrt{\{rgc(b^2-cm) + rr'c^2n^2 - h^2\}}}{g^2 + n^2d''^2},$$

waardoor wij dan hebben

$$O'A'^2 = x^2 + y^2 = \frac{rc(2x-c)}{d''} =$$

$$r \times \frac{gc(b^2-cm)+c^2n^2(r+r') \pm 2cn\sqrt{\{rgc(b^2-cm)+rr'c^2n^2-h^2\}}}{g^2+n^2d''^2}; \quad (11)$$

dienende nu deze vorm nog behoorlijk herleid te worden.

Uit $2cm = b^2 + c^2 - a^2$ volgt vooreerst:

$$b^2 - cm = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2),$$

en verder

$$gc = (cd' + md'')c = c^2d' + cmd'' = c^2d' + \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)d''$$
$$= c^2(r'' - r) + \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)(r - r')$$
$$= -\tfrac{1}{2}r(a^2 + c^2 - b^2) - \tfrac{1}{2}r'(b^2 + c^2 - a^2) + r''c^2,$$

zoodat wij, door het product dezer waarden te nemen, vinden

$$gc(b^2 - cm) = -\tfrac{1}{4}r(a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2)$$
$$- \tfrac{1}{4}r'(b^4 - a^4 - c^4 + 2a^2c^2)$$
$$+ \tfrac{1}{4}r''(2a^2c^2 + 2b^2c^2 - 2c^4);$$

omdat $m^2 + n^2 = b^2$ is, hebben wij

$$c^2n^2 = c^2(b^2 - m^2) = \tfrac{1}{4}\{4b^2c^2 - (2cm)^2\} = \tfrac{1}{4}\{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2\}$$
$$= \tfrac{1}{4}(-a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2);$$

omdat $2h = c^2d' + b^2d'' = c^2(r'' - r) + b^2(r - r')$ is, hebben wij $2h = r(b^2 - c^2) - r'b^2 + r''c^2$,

en $h^2 = \tfrac{1}{4}r^2(b^4 - 2b^2c^2 + c^4) + \tfrac{1}{4}r'^2b^4 + \tfrac{1}{4}r''^2c^4$

$+ \tfrac{1}{4}rr'(2b^2c^2 - 2b^4) + \tfrac{1}{4}rr''(2b^2c^2 - 2c^4) - \tfrac{1}{4}r'r''(2b^2c^2)$;

hieruit vinden wij dan vervolgens

$$rgc(b^2 - cm) + rr'c^2n^2 - h^2 =$$
$$= \tfrac{1}{4}(-r^2a^4 - r'^2b^4 - r''^2c^4 + 2r'r''b^2c^2 + 2rr''a^2c^2 + 2rr'a^2b^2),$$

en

$$gc(b^2 - cm) + c^2n^2(r + r') =$$
$$= \tfrac{1}{4}\{ra^2(b^2 + c^2 - a^2) + r'b^2(a^2 + c^2 - b^2) + r''c^2(a^2 + b^2 - c^2)\};$$

eindelijk is nog

$$g^2 + n^2d''^2 = (cd' + md'')^2 + (b^2 - m^2)d''^2 = c^2d'^2 + 2cmd'd'' + b^2d''^2$$
$$= c^2(r'' - r)^2 + (b^2 + c^2 - a^2)(r'' - r)(r - r') + b^2(r - r')^2$$
$$= a^2(r - r')(r - r'') + b^2(r' - r)(r' - r'') + c^2(r'' - r)(r'' - r').$$

Wanneer wij dus de bovengevondene, op eene symetrieke wijze uit de gegevens zamengestelde, uitdrukkingen, door enkele letters aanduiden, en alzoo stellen:

$$ra^2(b^2 + c^2 - a^2) + r'b^2(a^2 + c^2 - b^2) + r''c^2(a^2 + b^2 - c^2) = M,$$
$$a^2(r - r')(r - r'') + b^2(r' - r)(r' - r'') + c^2(r'' - r)(r'' - r') = N,$$

$$-r^2a^4-r'^2b^4-r''^2c^4+2r'r''b^2c^2+2rr''a^2c^2+2rr'a^2b^2=T,$$
$$-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2=t,$$

dan is: $$gc\,(b^2-cm)+c^2n^2\,(r+r')=\tfrac{1}{2}M,$$
$$cn=\tfrac{1}{2}\sqrt{t},$$
$$\sqrt{\{rgc\,(b^2-cm)+rr'c^2n^2-h^2\}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{T},$$
$$g^2+n^2d''^2=N,$$

waardoor wij voor de herleide waarde van $O'A'^2$ volgens (11) verkrijgen

$$\left.\begin{aligned} \text{krijgen}\quad O'A'^2 &= r\frac{M\pm\sqrt{Tt}}{2N};\\ \text{dus is}\quad O'B'^2 &= r'\frac{M\pm\sqrt{Tt}}{2N},\\ O'C'^2 &= r''\frac{M\pm\sqrt{Tt}}{2N},\\ \text{en}\quad R &= \frac{M\pm\sqrt{Tt}}{8N},\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (12)$$

terwijl de formulen (9) en (10) overgaan in

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2gh+2rcn^2d''\pm nd''\sqrt{T}}{2N},\\ \text{en}\quad y &= \frac{2hnd''-2rgcn\mp g\sqrt{T}}{2N}.\end{aligned}\right\}\ldots\ (13)$$

Door het uitbrengen dezer formulen, waarin de bovenste teekens tot het punt $O'_1$ en de benedenste tot het punt $O'$ behooren, is nu ons vraagstuk analytisch opgelost. De constructie, die uit deze analytische oplossing voortvloeit, laat zich kortelijk aldus zamenvatten:

Indien $A'$, $B'$ en $C'$ (Fig. 24) de horizontale projectiën zijn van de middelpunten der gegevene bollen, wier stralen respectievelijk zijn $r$, $r'$ en $r''$; beschrijf dan (op de in Fig. 26 aangewezene wijze) den cirkel, de meetkunstige plaats bevattende der punten, wier afstanden tot $A'$ en $B'$ evenredig zijn met $\sqrt{r}$ en $\sqrt{r'}$; beschrijf desgelijks den cirkel, in welks omtrek de punten gelegen zijn, wier afstanden tot $A'$ en $C'$ evenredig zijn met $\sqrt{r}$ en $\sqrt{r''}$; de snijpunten $O'$ en $O'_1$ dezer beide cirkels, zullen de horizontale projectiën zijn van de middelpunten van twee bollen, die aan de vraag voldoen. Construeer verder eene derde evenredige tot $r$ en $\tfrac{1}{2}O'A'$, en zet haar op eene lijn, uit $O'$ regthoekig door de as van projectie getrokken, boven de as uit, zoo-

dat $oO''$ gelijk aan die derde evenredige is; maak evenzoo $o_1O''_1$ gelijk aan eene derde evenredige tot $r$ en $\frac{1}{2}O'_1A'$; dan zullen $O''$ en $O''_1$ de verticale projectiën van de middelpunten der gevraagde bollen zijn, die respectievelijk $O''o$ en $O''_1o_1$ tot stralen hebben.

De oplossing der vraag zal alleen dan onmogelijk worden, wanneer de uitdrukkingen $\sqrt{Tt}$ en $\sqrt{T}$ onbestaanbaar zijn; en dit hangt, in de onderstelling dat $t$ niet gelijk nul is, alleen van $T$ af. Immers de uitdrukkingen door $t$ en $T$ voorgesteld, laten zich in vier factoren ontbinden, zoodat men heeft

$$t = (a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$$

en

$$T = (a\sqrt{r}+b\sqrt{r'}+c\sqrt{r''})(a\sqrt{r}+b\sqrt{r'}-c\sqrt{r''})$$
$$(a\sqrt{r}+c\sqrt{r''}-b\sqrt{r'})(b\sqrt{r'}+c\sqrt{r''}-a\sqrt{r});$$

daar nu $a$, $b$ en $c$ de zijden van een werkelijk bestaanden driehoek zijn, welks inhoud door $\frac{1}{4}\sqrt{t}$ wordt uitgedrukt, is $t$ zeker positief, en dus $\sqrt{Tt}$ bestaanbaar of onbestaanbaar, naar gelang $T$ positief of negatief is. Maar tot de bestaanbaarheid van den genoemden driehoek, dat is, tot den positieven toestand van $t$, is het noodzakelijk en voldoende, dat de grootste zijde kleiner zij dan de som der beide anderen; uit de overeenkomst der beide bovenstaande uitdrukkingen blijkt dus onmiddelijk, dat het ook tot den positieven toestand van $T$ noodzakelijk en voldoende is, dat van de drie waarden door $a\sqrt{r}$, $b\sqrt{r'}$ en $c\sqrt{r''}$ voorgesteld; de grootste kleiner zij dan de som der beide overigen. Indien de grootste gelijk aan de som der beide overigen mogt zijn, zou slechts $T = 0$ worden, zonder tot eenige onbestaanbaarheid aanleiding te geven; zoo wij dit in het oog houden, en tevens voor $a$, $b$ en $c$ derzelver waarden in $A$, $B$ en $C$ uitgedrukt substitueren, komen wij ten laatste tot het besluit, dat het tot de mogelijkheid van de oplossing des voorstels noodzakelijk en voldoende is, dat de drie waarden, door de uitdrukkingen

$$\sqrt{r\{A^2-(r'-r'')^2\}}, \sqrt{r'\{B^2-(r-r'')^2\}} \text{ en } \sqrt{r''\{C^2-(r-r')^2\}}$$

voorgesteld, ieder op zich zelve bestaanbaar zijn, en dat de grootste dezer drie waarden niet grooter dan de som der beide overige zij.

Liggen de middelpunten der gegevene bollen in een zelfde verticaal vlak, en dus de horizontale projectiën $A'$, $B'$ en $C'$ van die middelpunten in eene zelfde regte lijn, dan ontstaat het bij-

zondere geval, waarin $t = 0$ is. Beschouwen wij b. v. het geval, dat het punt C′ op de lijn A′B′ tusschen de punten A′ en B′ ligt, dan is $c = a + b$
waaruit dadelijk volgt:

$$m = b, \quad n = 0 \quad \text{en} \quad t = 0;$$

verder wordt in dit geval:

$$g = cd' + bd'' = (a+b)(r'' - r) + b(r - r') =$$
$$= -a(r - r'') - b(r' - r'') = -ar - br' + cr'',$$
$$2h = c^2d' + b^2d'' = c^2(r'' - r) + b^2(r - r') = c^2r'' - (a+b)^2r + b^2(r - r')$$
$$= -a^2r - b^2r' + c^2r'' - 2abr,$$
$$\tfrac{1}{2}M = gc(b^2 - cb) = (b - c)bcg = -abcg,$$
$$N = g^2,$$
$$\frac{M}{2N} = \frac{-abcg}{g^2} = \frac{abc}{-g} = \frac{abc}{ar + br' - cr''};$$

waardoor de formulen (12) en (13) geven:

$$O'A'^2 = \frac{abcr}{ar + br' - cr''},$$
$$O'B'^2 = \frac{abcr'}{ar + br' - cr''},$$
$$O'C'^2 = \frac{abcr''}{ar + br' - cr''},$$
$$R = \frac{abc}{4(ar + br' - cr'')},$$
$$x = \frac{h}{g} = \tfrac{1}{2}.\frac{a^2r + b^2r' - c^2r'' + 2abr}{ar + br' - cr''},$$

en $$y = \mp\frac{\sqrt{T}}{2g} = \pm\tfrac{1}{4}.\frac{\sqrt{T}}{ar + br' - cr''}.$$

Hier verkrijgen alzoo $R$ en $x$ ieder slechts ééne waarde, terwijl $y$ twee waarden verkrijgt, die even groot, maar tegengesteld van teeken zijn. Het is dan ook duidelijk, dat er in dit geval twee bollen van gelijken straal moeten zijn, die aan de vraag beantwoorden, en zich aan weerszijden bevinden van het verticale vlak, dat door de middelpunten der gegevene bollen gaat. Ook nu wordt tot de mogelijkheid der oplossing niet anders dan de bestaanbaarheid van $\sqrt{T}$ gevorderd; want zoo $T$ positief is, heeft men $a\sqrt{r} + b\sqrt{r'} > c\sqrt{r''}$.

en dus $$a^2r + 2ab\sqrt{rr'} + b^2r' > c^2r'';$$
maar omdat altijd $r + r' > 2\sqrt{rr'}$, en dus ook $ab(r + r') > 2ab\sqrt{rr'}$ is, heeft men als de voorgaande voorwaarde vervuld is, zooveel te meer $$a^2r + ab\,(r + r') + b^2r' > c^2r'',$$
dat is $$(ar + br')\,(a + b) > c^2r'',$$
of, door $(a + b) = c$ deelende,
$$ar + br' > cr'';$$
derhalve is dan niet alleen de waarde van $R$, maar ook die van $O'A'^2$, $O'B'^2$ en $O'C'^2$ positief, zoo als tot de bestaanbaarheid vereischt wordt.

Passen wij thans de formulen (12) toe op het geval, dat de gegevene bollen even groot zijn. Zoo wij daartoe $r' = r'' = r$ stellen, hebben wij, volgens de uitdrukkingen, die door de letters $M$, $T$, $t$ en $N$ zijn voorgesteld geworden, $M = rt$, $T = r^2t$ en $N = 0$. Hierdoor wordt
$$R = \frac{rt \pm rt}{0}, \text{ dat is } R = \infty \text{ of } R = \frac{0}{0},$$
zoodat van de beide waarden van $R$ de eene oneindig groot wordt, terwijl de andere door onze formulen in eenen onbepaalden vorm wordt aangewezen. Uit $R = \dfrac{M + \sqrt{Tt}}{8N} = \infty$, volgt, zoo als met den aard der zaak overeenkomt, dat er in dit geval slechts één bol aan de vraag voldoet, welks straal door de uitdrukking $R = \dfrac{M - \sqrt{Tt}}{8N}$ zou worden aangewezen, indien die uitdrukking niet den onbepaalden vorm $\dfrac{0}{0}$ aannam. Zie hier nu, hoe de waarde van dien onbepaalden vorm gevonden wordt.

Vermenigvuldigen wij vooreerst teller en noemer met $M + \sqrt{Tt}$, dan komt er $$R = \frac{M^2 - Tt}{8N\,(M + \sqrt{Tt})};$$
zoodat het er nu op aan zal komen te doen zien, dat $M^2 - Tt$ door $N$ deelbaar is, als wanneer na het weglaten van dien gemeenen factor, het gebroken niet meer den vorm $\dfrac{0}{0}$ zal aannemen, indien men de stralen der gegevene bollen aan elkander gelijk stelt.

De uitdrukking, die door $M$ voorgesteld is, tot de tweede magt verheffende, komt er

$$M^2 = \begin{Bmatrix} r^2a^4(b^2+c^2-a^2)^2+2r'r''b^2c^2(a^4-b^4-c^4+2b^2c^2) \\ +r'^2b^4(a^2+c^2-b^2)^2+2rr''a^2c^2(b^4-a^4-c^4+2a^2c^2) \\ +r''^2c^4(a^2+b^2-c^2)^2+2rr'a^2b^2(c^4-a^4-b^4+2a^2b^2) \end{Bmatrix};$$

maar lettende op de uitdrukking, die door $t$ is voorgesteld, heeft men blijkbaar

$$(b^2 + c^2 - a^2)^2 = 4b^2c^2 - t,$$

$$a^4 - b^4 - c^4 + 2b^2c^2 = t - 2a^2\,(b^2 + c^2 - a^2), \text{ enz.},$$

en derhalve kunnen wij voor de waarde van $M^2$ schrijven,

$$M^2 = \begin{Bmatrix} r^2a^4(4b^2c^2-t)+2r'r''b^2c^2(t-2a^2(b^2+c^2-a^2)) \\ +r'^2b^4(4a^2c^2-t)+2rr''a^2c^2(t-2b^2(a^2+c^2-b^2)) \\ +r''^2c^4(4a^2b^2-t)+2rr'a^2b^2(t-2c^2(a^2+b^2-c^2)) \end{Bmatrix};$$

elk der zes termen, waaruit deze uitdrukking bestaat, kan men in twee termen verdeelen, waarvan de eene den factor $t$, de andere den factor $4a^2b^2c^2$ bevat; al de termen, die $t$ bevatten, vereenigende, verkrijgt $t$ juist tot coëfficiënt de uitdrukking, die wij door $T$ hebben voorgesteld; hierdoor ontstaat een enkele term $Tt$, dien men in het voorste lid der vergelijking kan overbrengen, waarna men tevens die vergelijking door $4a^2b^2c^2$ deelen kan; dit geeft dan

$$\frac{M^2 - Tt}{4a^2b^2c^2} = \begin{Bmatrix} r^2a^2 - r'r''\,(b^2 + c^2 - a^2) \\ + r'^2b^2 - rr''\,(a^2 + c^2 - b^2) \\ + r''^2c^2 - rr'\,(a^2 + b^2 - c^2) \end{Bmatrix},$$

waarvoor wij ook kunnen schrijven

$$\frac{M^2 - Tt}{4a^2b^2c^2} = \begin{Bmatrix} a^2\,(r^2 + r'r'' - rr'' - rr') \\ + b^2\,(r'^2 + rr'' - r'r'' - rr') \\ + c^2\,(r''^2 + rr' - r'r'' - rr'') \end{Bmatrix};$$

maar nu is het tweede lid juist gelijk aan de uitdrukking, die door $N$ is voorgesteld geworden, en derhalve hebben wij

$$\frac{M^2 - Tt}{4a^2b^2c^2} = N \quad \text{of} \quad \frac{M^2 - Tt}{4N} = a^2b^2c^2,$$

zoodat de laatstgevormde uitdrukking voor $R$ overgaat in

$$R = \frac{a^2b^2c^2}{2\,(M + \sqrt{Tt})}.$$

Stellen wij hierin $r' = r'' = r$, dus $M = rt$ en $T = r^2t$, dan vinden wij voor dit geval:

$$R = \frac{a^2b^2c^2}{4rt},$$

en dus $\quad O'A'^2 = O'B'^2 = O'C'^2 = \frac{a^2b^2c^2}{t}.$

Indien $I$ de inhoud is van den driehoek, die $a$, $b$ en $c$ tot zijden heeft, en $\rho$ de straal van den cirkel, om dien driehoek beschreven, heeft men de bekende formulen

$$t = 16I^2 \quad \text{en} \quad \rho = \frac{abc}{4I},$$

en in het laatstbeschouwde geval is dus ook

$$R = \frac{a^2b^2c^2}{64rI^2} = \frac{\rho^2}{4r},$$

en $\quad O'A' = O'B' = O'C' = \rho.$

Lagen bovendien de middelpunten der gegevene bollen in de hoekpunten van een gelijkzijdigen driehoek, zoodat $a = b = c$ was, dan werd $a^2b^2c^2 = a^6$, $t = 3a^4$ en dus

$$R = \frac{a^2}{12r};$$

en zoo nu nog bovendien de gegevene bollen elkander raakten, zoodat men had $a = 2r$, zou men hebben

$$R = \tfrac{1}{3}r.$$

Deze laatste uitkomsten kunnen ook gemakkelijk regtstreeks gevonden worden.

## VRAAGSTUK I.

*Een vat heeft de gedaante eener omwentelingsparaboloïde; de as staat verticaal, en in den bodem, welks laagste punt tevens de top der paraboloïde is, is eene horizontale cirkelvormige opening. Men vraagt: in hoeveel tijd het vat, tot eene zekere hoogte met water gevuld zijnde, ledig zal loopen.*

### OPLOSSING.

Gelijk bekend is, wordt de watermassa $M$, die onder eene standvastige drukhoogte in $t$ seconden uit eene opening loopt, waarvan de vlakke inhoud $a$ is, uitgedrukt door de formule

$$M = \alpha at\sqrt{2gh},$$

zijnde hierin $h$ de standvastige hoogte van den waterspiegel boven de opening, $g$ de versnelling der zwaartekracht, en $\alpha$ een door proeven te bepalen coëfficiënt, die van verschillende omstandigheden afhangt.

Veronderstellende dan, dat het water in het parabolische vat MAN (Fig. 28) tot op eene hoogte $AB = h$ staat, en door eene in den top A aanwezige opening, welks middellijn $d$ is, uitvloeit; indien dan de waterspiegel gedurende den tijd $t$ eene daling $BC = x$ ondergaat, zal hij in het opvolgende tijddeeltje $\delta t$ eene daling $\delta x$ ondergaan. Gedurende dit tijddeeltje $\delta t$ mag de uitvloeijing aangemerkt worden als onder eene standvastige drukhoogte $AC = h - x$ plaats te hebben; de watermassa $\delta M$, die in het tijddeeltje $\delta t$ uitvloeit, wordt dus volgens de aangehaalde formule gevonden, zoo wij daarin $M$ door $\delta M$, $t$ door $\delta t$, $h$ door $h - x$ en $a$ door $\frac{1}{4}\pi d^2$ vervangen, hetgeen geeft

$$\delta M = \tfrac{1}{4}\alpha\pi d^2\delta t\sqrt{2g(h-x)}.$$

Maar de watermassa, die in het tijddeeltje $\delta t$ uitvloeit, mag ook aangemerkt worden als een cilinder, die $\delta x$ tot hoogte heeft en waarvan een cirkel, CD tot straal hebbende, het grondvlak is; zoo wij dus den parameter der beschrijvende parabool $p$ noemen, en bijgevolg $CD^2 = p \times AC = p(h-x)$ is, hebben wij ook

$$\delta M = \pi \times CD^2 \times \delta x = \pi p\,(h-x)\,\delta x,$$

en door de beide waarden van $\delta M$ aan elkander gelijk te stellen, hebben wij alzoo de vergelijking

$$\tfrac{1}{4}\alpha\pi d^2\delta t\sqrt{2g(h-x)} = \pi p\,(h-x)\,\delta x,$$

waaruit volgt $\quad \delta t = \dfrac{4p}{\alpha d^2\sqrt{2g}}\,\delta x\sqrt{(h-x)}$

en $\quad t = \dfrac{2p\sqrt{2}}{\alpha d^2\sqrt{g}}\int\delta x\sqrt{(h-x)}.$

Stelt men hier $h - x = z$; dus $\delta x = -\delta z$, dan wordt

$$\int\delta x\sqrt{(h-x)} = -\int z^{\frac{1}{2}}\delta z = -\tfrac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} = -\tfrac{2}{3}\sqrt{(h-x)^3},$$

en bijgevolg $\quad t = \dfrac{2p\sqrt{2}}{\alpha d^2\sqrt{g}}\left\{C - \tfrac{2}{3}\sqrt{(h-x)^3}\right\}.$

Nemen wij nu deze integraal tusschen de limiten $x = 0$ en $x = h$, zoo komt er, voor den gevraagden tijd,

$$t = \frac{2p\sqrt{2}}{\alpha d^2\sqrt{g}} \times \tfrac{2}{3}\sqrt{h^3} = \frac{4}{3}\cdot\frac{ph}{\alpha d^2}\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

waarvoor men ook nog kan schrijven

$$t = \frac{1}{3\alpha} \cdot \frac{EF^2}{d^2} \cdot \sqrt{\frac{2AB}{g}}.$$

Zij tot een voorbeeld:

$$h = 0{,}6 \text{ el},$$
$$d = 0{,}01 \text{ el},$$
$$p = 0{,}2 \text{ el};$$
$$g = 9{,}812 \text{ el};$$
$$\alpha = 0{,}62;$$

zoo vindt men

$$t = \frac{4 \times 0{,}2 \times 0{,}6}{3 \times 0{,}62 \times 0{,}0001} \cdot \sqrt{\frac{1{,}2}{9{,}812}} = 902{,}6 \text{ sec.} = 15 \text{ min.}$$

nagenoeg.

# OPLOSSING

VAN EEN

ALS PRIJSVRAAG VOORGESTELD

# VRAAGSTUK,

VOOR WELKS BEANTWOORDING, TER ALGEMEENE VERGADERING VAN DEN JARE 1846, EENE AANLAGE TER BEHALING VAN EENEN PRIJS IS TOEGEKEND, AAN HET LID DES GENOOTSCHAPS

## F. A. T. DELPRAT.

## VRAAGSTUK K.

*Eene horizontale onbuigbare plaat rust op vijf steunpunten, die zoo geplaatst zijn, dat zij door de hoekpunten van eenen regelmatigen vijfhoek* ABCDE *kunnen voorgesteld worden. Elk dezer vijf steunpunten kan niet meer dan een bepaald draagvermogen uitoefenen, waarvan de hoegrootheid voor het punt* A *door* $P$, *voor het punt* B *door* $P(1 + \sqrt{5})$, *voor het punt* C *door* $2P(1 + \sqrt{5})$, *voor het punt* D *door* $2P$, *en voor het punt* E *door* $3P$ *wordt uitgedrukt. Wanneer nu de genoemde plaat, in het snijpunt der diagonalen* AD *en* BE, *eenen last moet dragen, wil men de grens vinden, welke die last niet overschrijden kan, zonder het bezwijken van een of meer der steunpunten te veroorzaken. Hierbij onderstellende, dat de dikte en het gewigt der plaat te gering zijn, om in aanmerking te komen.*

## OPLOSSING.

§ 1. Laat Fig. 29 den bedoelden vijfhoek voorstellen, en alzoo ingevolge de opgave N het punt zijn, waar men de grootstmogelijke belasting wenscht aan te brengen.

De gegevene uiterste draagvermogens in elk der steunpunten A, B, C, D en E kortheidshalve door $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ en $S_5$ voor-

stellende, en hen als even zoovele evenwijdige krachten loodregt op het vlak des veelhoeks aannemende, zal de grootte en het aangrijpingspunt van hunne resultante $Q$ bepaald kunnen worden door de bekende vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} Q &= \Sigma(S), \\ m &= \frac{\Sigma(pS)}{\Sigma(S)}, \\ \text{en} \qquad n &= \frac{\Sigma(qS)}{\Sigma(S)}; \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (1)$$

waarin $\Sigma(S)$ de som der krachten $S_1$, $S_2$, enz., $\Sigma(pS)$ en $\Sigma(qS)$ de sommen van hare momenten, ten opzigte van twee regthoekige assen in het vlak des veelhoeks, en $m$ en $n$ de coördinaten van het aangrijpingspunt harer resultante, ten opzigte van die assen, beteekenen.

§ 2. Voor deze assen zullen wij de lijn AE, benevens de lijn CL aannemen; zijnde CL uit het hoekpunt C des veelhoeks door het punt N getrokken, en dus loodregt op AE, terwijl deze CL almede den diagonaal BD in deszelfs midden M regthoekig snijdt.

Door de som der gegevene uiterste draagvermogens te nemen, hebben wij volgens (1) vooreerst

$$Q = \Sigma(S) = 3P(3 + \sqrt{5});$$

voorts is, ten opzigte van de as AE,

$$\begin{aligned} m &= \frac{\text{ML} \times (S_2 + S_4) + \text{CL} \times S_3}{\Sigma(S)} \\ &= \frac{\text{ML} \times P(3 + \sqrt{5}) + \text{CL} \times 2P(1 + \sqrt{5})}{3P(3 + \sqrt{5})} \\ &= \tfrac{1}{3}\text{ML} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \times \text{CL}, \end{aligned}$$

en, ten opzigte van de as CL,

$$\begin{aligned} n &= \frac{\text{AL} \times S_1 + \text{BM} \times S_2 - \text{DM} \times S_4 - \text{EL} \times S_5}{\Sigma(S)} \\ &= \frac{\text{AL} \times (S_1 - S_5) + \text{BM} \times (S_2 - S_4)}{\Sigma(S)} \\ &= \frac{\text{AL} \times (-2P) + \text{BM} \times P(-1 + \sqrt{5})}{3P(3 + \sqrt{5})} \\ &= \frac{-2\text{AL} + (-1 + \sqrt{5}) \times \text{BM}}{3(3 + \sqrt{5})}; \end{aligned}$$

maar de zijde des vijfhoeks $a$ noemende, is deszelfs diagonaal $\frac{1}{2}a(1+\sqrt{5})$; dus hebben wij, omdat AF $=$ DE $= a$ is,

$$AC : AF = BD : AE = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) : 1,$$

alsmede $CL : ML = AC : AF = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) : 1$

en $BM : AL = BD : AE = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) : 1$;

hieruit volgt

$$CL = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \times ML, \quad BM = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \times AL,$$

en door deze waarden voor CL en BM te substitueren, komt er

$$m = ML \text{ en } n = 0,$$

waaruit blijkt, dat het aangrijpingspunt der bovengenoemde resultante, juist in het punt M valt.

§ 3. Daar nu dit aangrijpingspunt niet zamenvalt met het gegeven aangrijpingspunt N der gevraagde grootstmogelijke belasting $L$, moet ook noodzakelijk die belasting $L$ kleiner zijn dan de genoemde resultante $Q$, dat is, wij moeten hebben

$$L < Q \text{ of } L < 3P(3+\sqrt{5});$$

al de steunpunten kunnen dus, als de last in het punt N wordt aangebragt, niet op het uiterst belast blijven, en de vraag is alzoo teruggebragt tot die, om eene belasting, in N werkende, zoodanig over de steunpunten te verdeelen, dat daarbij geen der steunpunten overbezwaard zij, dat daarbij ook geen der steunpunten eene negatieve drukking onderga, en dat tevens de som der wederstanden door de steunpunten geboden, of wat hetzelfde zegt, de som der krachten, die deze wederstanden kunnen vervangen, zoo groot mogelijk blijve; als zijnde die som altijd gelijk aan de in N werkende belasting. Of wel, in andere woorden, wij zullen moeten trachten, door de kleinstmogelijke vermindering der krachten $S$, hare resultante, die dan gelijk en tegengesteld aan de gevraagde grootste belasting $L$ zal wezen, uit M in N te brengen.

Hiertoe dienen de volgende beschouwingen.

§ 4. De verminderingen, die de uiterste wederstanden of de krachten $S$ moeten ondergaan, opdat hunne resultante uit M in N kome en gelijk aan $L$ zij, kunnen wij ons voorstellen als te ontstaan door krachten $S'$ op de steunpunten in tegengestelde rigting der wederstanden en dus in dezelfde rigting als de last $L$ werkende. Deze krachten $S'$ mogen echter nimmer grooter genomen worden dan de tot hetzelfde steunpunt behoorende krach-

ten $S$, daar wij uit den aard der zaak op geen der steunpunten negatieve drukkingen kunnen toelaten.

De resultante der genoemde krachten $S'$ door $R'$ voorstellende, is dan

$$\left.\begin{array}{l} L = \Sigma(S) - \Sigma(S') = Q - R' \\ \text{of} \quad L + \Sigma(S') = L + R' = Q; \end{array}\right\} \quad (2)$$

om $L$ zoo groot mogelijk te laten blijven, zal dus $R'$ zoo klein mogelijk moeten wezen; zijnde het verder, daar de drie evenwijdige krachten $L$, $R'$ en $Q$ met elkander evenwigt maken, duidelijk, dat elk dier krachten gelijk en tegengesteld aan de resultante der beide andere is, en dat hare aangrijpingspunten in dezelfde regte lijn CL moeten gelegen zijn.

§ 5. Wij hebben alzoo in het vlak des veelhoeks eene lijn CL (Fig. 30), waarop deze drie evenwijdige krachten loodregt werken, waarin de punten M en N gegeven zijn, terwijl ook de grootte der kracht $Q$, in M werkende, bekend is, en waarin nu een punt N′ zoodanig moet gekozen worden, dat eene aldaar werkende kracht $R'$ zoo klein als mogelijk zij, om met $Q$ en met eene in N werkende kracht $L$ evenwigt te maken.

§ 6. De rigtingen in aanmerking nemende, volgens welke de genoemde krachten hier moeten werken, volgt al dadelijk uit de eerste gronden der statica:

1°. dat de punten N′ en N aan weerszijden van het punt M zullen moeten liggen;

2°. dat wij zullen moeten voldoen aan de vergelijking

$$NM \times Q = NN' \times R'; \quad (3)$$

3°. dat bijgevolg NN′ zoo groot mogelijk zal moeten genomen worden, opdat $R'$ zoo klein mogelijk zij; waarbij nog valt op te merken

4°. dat, $R'$ geleverd wordende door krachten $S'$ in de steunpunten, het aangrijpingspunt N′ niet buiten de grenzen van den veelhoek zal kunnen vallen.

§ 7. Ingevolge dit alles nu, zouden wij, ingevalle LC eene der veelhoekszijden BC of CD sneed, de beide steunpunten C en B of C en D zoodanig moeten verligten, dat is: in die punten zoodanige krachten $S'$ aangebragt denken, dat daardoor in het snijpunt van LC met de veelhoekszijde eene resultante $R'$ van die krachten $S'$ ontstond, die aan de vergelijking (3) kon voldoen. Maar omdat hier, wegens de bijzondere waarde en gesteldheid der

gegevens, LC juist dóór een der steunpunten, namelijk door C, gaat; zullen wij aanvankelijk moeten beproeven of het mogelijk zij, door het verligten van C alleen en zonder aldaar eene negatieve drukking voort te brengen, aan de vergelijking (3) te voldoen. Alsdan zal NN′ zoo groot mogelijk zijn, en bovendien kan men nimmer door het gelijktijdig verligten van B en C, of van D en C, eene resultante $R'$ dier verligtingen in C of in de lijn LC doen ontstaan.

§ 8. Het verligten der steunpunten B en D, terwijl men C volkomen belast laat, kan niet baten. Immers zoo men B en D verligt, valt het aangrijpingspunt van de resultante $R'$ dier verligtingen in M, terwijl het in C valt, wanneer men C alleen verligt; in het eene geval verkrijgt alzoo NN′ eene kleinere, en dus, om aan (3) te blijven voldoen, $R'$ eene grootere waarde, dan in het andere geval. Ook is het, wanneer $R'$ haar aangrijpingspunt in M verkrijgt, onmogelijk, dat $R'$ en $Q$ eene resultante gelijk en tegengesteld aan $L$ in het punt N zouden hebben. Maar bovendien mag men algemeen stellen, dat nimmer de grootstmogelijke belasting zal aangebragt zijn, wanneer de lijn, die twee onvolkomene of twee geheel niet belaste steunpunten vereenigt, het aangrijpingspunt van den last aan de éene, en eenig volkomen belast punt aan de andere zijde laat; want door dan in zoodanig volkomen belast punt eene kleine vermindering van den druk, en in de twee onvolkomen of niet belaste punten eene kleine vermeerdering van den druk aan te brengen, zou men dan nog altijd een grooteren last in hetzelfde aangrijpingspunt, kunnen tegenhouden.

Evenmin zal in het algemeen, en om eene dergelijke rede, de grootstmogelijke last aangebragt zijn, wanneer er meer dan twee onvolkomen belaste steunpunten zijn; moetende men hier door onvolkomen belaste steunpunten altijd dezulken verstaan, die nog werkelijk eenigen druk ondervinden.

Het verligten der steunpunten A en E zou de resultante der wederstanden, die bij de uiterste belasting van al de steunpunten in M valt, van M nog verder naar de zijde van C verwijderen, in plaats van haar in N te brengen; terwijl het verligten van D en E, van A en B, van A en D, of van B en E, enz., blijkbaar geheel het doel zoude missen, daar men hierdoor òf de resultante $R'$

dier verligtingen buiten CL zou doen vallen, òf in strijd zou handelen met de zoo even opgegevene voorwaarden voor het bestaan eener grootstmogelijke belasting.

§ 9. Is zoowel het geheel als het gedeeltelijk onbelast laten van het steunpunt C ontoereikend, om te maken, dat $R'$ met $Q$ eene resultante in N verkrijge, zoo late men C geheel onbelast, en zoeke de grootstmogelijke belasting, die de punten A, B, D en E nog in N zullen kunnen dragen. Hiertoe zoekt men dan vooreerst de resultante $Q'$ van de vier overgeblevene draagvermogens $S_1$, $S_2$, $S_4$ en $S_5$, bepaalt haar aangrijpingspunt M', en onderzoekt vervolgens, hoe men in eenig punt van de lijn, die door M' en N gaat, door het minstmogelijk verligten der vier genoemde steunpunten, eene resultante $R''$ dier verligtingen kan voortbrengen, welke met $Q'$ eene resultante in N oplevert. De gevraagde grootstmogelijke belasting zal dan klaarblijkelijk gelijk en tegengesteld aan de laatstgenoemde resultante, en dus gelijk aan $Q' - R''$ zijn.

Gaan wij dus nu tot de bijzonderheden dezer berekeningen over.

§ 10. Uit de vergelijking (3) van § 6 hebben wij dan vooreerst

$$R' = \frac{\text{NM}}{\text{NN}'} \times Q = \frac{\text{NM}}{\text{NN}'} \times 3P(3 + \sqrt{5});$$

maar ingevolge § 7 moeten wij hierin, door alleen het steunpunt C te verligten, voor NN' de lijn CN nemen, terwijl dan $R'$ juist de verligting $S'_3$ is, die in het punt C wordt aangebragt;

dit geeft dan $$S'_3 = \frac{\text{NM}}{\text{CN}} \times 3P(3 + \sqrt{5}),$$

of, omdat uit het parallelogram BCDN onmiddellijk blijkt, dat NM $= \frac{1}{2}$CN is, $S'_3 = \frac{3}{2}P(3 + \sqrt{5})$.

Daar nu deze waarde grooter is, dan het uiterste draagvermogen $S_3 = 2P(1 + \sqrt{5})$ van het steunpunt C, zoo zouden wij eenen negatieven druk in C verkrijgen; en besluiten hieruit, dat het geheel opheffen van den druk in C ontoereikend is, om de resultante van de overblijvende wederstanden der steunpunten, in N te brengen.

Alzoo overgaande tot het onderzoek in § 9 omschreven, laten wij het steunpunt C geheel onbelast.

§ 11. Voor de resultante $Q'$ der vier uiterste draagvermogens

$S_1$; $S_2$, $S_4$ en $S_5$ vinden wij dan

$$Q' = P(7 + \sqrt{5});$$

terwijl, volgens de algemeene formulen (1) van § 1, voor de coördinaten $m'$ en $n'$ van haar aangrijpingspunt, ten opzigte van de reeds gebezigde assen AE en CL, gevonden wordt

$$m' = \frac{\mathrm{ML} \times (S_2 + S_4)}{Q'} = \frac{\mathrm{ML} \times P(3 + \sqrt{5})}{P(7 + \sqrt{5})} = \frac{3 + \sqrt{5}}{7 + \sqrt{5}} \times \mathrm{ML},$$

en $$n' = \frac{\mathrm{AL} \times (S_1 - S_5) + \mathrm{BM}\,(S_2 - S_4)}{Q'} = 0;$$

alzoo reeds in § 2 gebleken is, dat de laatste teller nul is.

Het aangrijpingspunt van $Q'$ valt dus op de lijn CL ergens in M′, tusschen M en N, zoodanig dat men heeft

$$\mathrm{M'L} = \frac{3 + \sqrt{5}}{7 + \sqrt{5}} \times \mathrm{ML} \quad \text{en} \quad \mathrm{MM'} = \frac{4}{7 + \sqrt{5}} \times \mathrm{ML};$$

kunnende voor deze laatste waarde ook geschreven worden

$$\mathrm{MM'} = \tfrac{1}{22}(-1 + \sqrt{5})(1 + 3\sqrt{5}) \times \mathrm{ML}.$$

§ 12. Volgens § 9, in verband met § 6, moeten wij nu trachten, om door het verligten der overige vier steunpunten eene resultante $R''$ dier verligtingen te bekomen, die haar aangrijpingspunt ergens op de lijn MN tusschen M′ en M of op het uiterste in het punt M heeft, zoodanig, dat $R''$ met $Q'$ eene resultante in het punt N verkrijgt.

Uit de bloote inzage reeds der figuur, en uit grond van al het vroeger aangemerkte, blijkt terstond, dat de punten B en D niet alleen het voordeeligste tot deze verligting gelegen zijn, maar dat zij ook het eenigste paar steunpunten zijn, met wier verligting het beoogde doel te bereiken is.

Er blijft ons dus nog slechts over na te gaan, welke gelijktijdige verligting de punten B en D moeten ondergaan, om eene kracht $R''$ in M te verkrijgen, welke aan de vergelijking (3) van § 6, zoo als die nu wordt, voldoen zal.

Deze vergelijking dan wordt nu

$$\mathrm{NM'} \times Q' = \mathrm{NM} \times R'',$$

en geeft dus

$$R'' = \frac{\mathrm{NM'}}{\mathrm{NM}} \times Q' = \frac{\mathrm{NM'}}{\mathrm{NM}} \times P(7 + \sqrt{5});$$

maar vroeger vonden wij reeds $CL = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \times ML$, en dus is

$$NM = CM = CL - ML = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \times ML;$$

voorts is

$$NM' = NM - MM' = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) \times ML - \tfrac{1}{22}(-1+\sqrt{5})(1+3\sqrt{5}) \times ML,$$

dus $\frac{NM'}{NM} = 1 - \frac{1}{11}(1 + 3\sqrt{5}) = \frac{1}{11}(10 - 3\sqrt{5})$,

en alzoo verkrijgen wij

$$R'' = \tfrac{1}{11}P(10 - 3\sqrt{5})(7 + \sqrt{5}) = P(5 - \sqrt{5}).$$

Deze kracht $R''$ moet geleverd worden door de verligtingen, die in de punten B en D moeten worden aangebragt; maar deze punten zijn even ver van M verwijderd, en dus moeten hunne verligtingen ieder even veel tot $R''$ bijdragen, of ieder gelijk aan $\frac{1}{2}R''$ zijn. De verminderingen, die de uiterste draagvermogens

$$S_2 = P(1 + \sqrt{5}) \quad \text{en} \quad S_4 = 2P$$

moeten ondergaan, zijn dus

$$S'_2 = \tfrac{1}{2}P(5 - \sqrt{5}) \quad \text{en} \quad S'_4 = \tfrac{1}{2}P(5 - \sqrt{5}),$$

en er blijft dan over voor de wederstanden, die de punten B en D werkelijk aan den grootsten in N geplaatsten last bieden,

$$S_2 - S'_2 = \tfrac{3}{2}P(-1 + \sqrt{5}) \quad \text{en} \quad S_4 - S'_4 = \tfrac{1}{2}P(-1 + \sqrt{5}),$$

welke naar behooren positief zijn.

De twee overige steunpunten A en E blijven volkomen belast, en de wederstanden, die zij aan den grootsten last bieden, zijn dus juist hunne uiterste draagvermogens

$$S_1 = P \quad \text{en} \quad S_5 = 3P,$$

terwijl het punt C volkomen onbelast blijft.

De som dezer vier wederstanden zal dan gelijk zijn aan den grootsten last, welke door de gegevene steunpunten in het punt N kan gedragen worden; die grootste last is dus

$$L = P + 3P + \tfrac{3}{2}P(-1 + \sqrt{5}) + \tfrac{1}{2}P(-1 + \sqrt{5}) = 2P(1 + \sqrt{5}),$$

en een grootere last in N aangebragt, zal alzoo noodzakelijk het bezwijken van een of meer steunpunten moeten veroorzaken.

Uit deze uitkomst blijkt dan, dat het steunpunt C alleen dezen zelfden last zou hebben kunnen dragen, indien die last juist in dat punt was aangebragt geworden.

§ 13. Wij hadden de algemeene beschouwingen en voorwaarden van § 8 nog meer kunnen uitbreiden, doch vermeenden,

dat zulks voor ons doel niet verder noodig was. Deze en nog vele andere dergelijke voorwaarden strekken echter ten grondslag aan de oplossing eener meer algemeene opgave van het hier behandelde vraagstuk; namelijk, om bij een willekeurig aantal steunpunten van gegevene draagvermogens, hoe die ook in een vlak gelegen zijn, den grootstmogelijken last voor een bepaald aangrijpingspunt te vinden.

Dit vraagstuk is uitvoerig behandeld, en op een hoogst algemeene en oorspronkelijke wijze opgelost door den *Luit^t.-Kol. Ingenieur* J. P. Delprat, in een opstel, te vinden in de *Verhandelingen der* 1^ste^ *klasse van het Kon. Nederl. Instituut*, Deel 8.

De hier door ons gegevene oplossing is uit het genoemde opstel getrokken, en kan dus slechts als eene navolging daarvan beschouwd worden.

---

# OPLOSSING

VAN EEN

ALS PRIJSVRAAG VOORGESTELD

# VRAAGSTUK,

VOOR WELKS BEANTWOORDING, TER ALGEMEENE VERGADERING VAN DEN JARE 1848, EENE AANLAGE TER BEHALING VAN EENEN PRIJS IS TOEGEKEND, AAN HET LID DES GENOOTSCHAPS

## *L. COHEN STUART.*

## VRAAGSTUK L.

*Men vraagt den stand der drie voorname of hoofd-assen van omwenteling te bepalen, die in een scheeven kegel, met cirkelvormige basis, door het zwaartepunt van dat ligchaam kunnen getrokken worden.* (*)

### OPLOSSING.

Wanneer een plat vlak een gelijkslachtig ligchaam zoodanig snijdt, dat van elke lijn, die regthoekig op het snijdende vlak is, door het oppervlak des ligchaams aan weerszijden gelijke stukken worden afgesneden, zoo is iedere loodlijn op dit vlak eene der hoofdomwentelingsassen van het ligchaam.

Nemen wij toch, in het snijdende vlak, twee willekeurige doch onderling regthoekige lijnen als assen der $y$ en der $z$ van een

(*) Van dit vraagstuk is mede reeds door het Lid des Genootschaps G. F. W. Baehr, eene oplossing gegeven, welke onder L°. A in de tegenwoordige verzameling is opgenomen.

regthoekig coördinatenstelsel aan, zoo is de as der $x$ eene willekeurig gekozene loodlijn op het snijdende vlak. Zijn nu $x_1$, $y_1$ en $z_1$ de coördinaten, behoorende tot een der elementen $\delta m$, waarin wij ons het ligchaam verdeeld denken, zoo bevat het altijd een tweede element, volkomen gelijk aan het eerste, met $-x_1$, $y_1$ en $z_1$ tot coördinaten. De uitdrukkingen $\Sigma x_1 y_1 \delta m$ en $\Sigma x_1 z_1 \delta m$ zijn dus beide gelijk nul, en de vergelijking der centrale ellipsoïde, namelijk:

$$\left.\begin{array}{l} z^2\Sigma(x_1^2+y_1^2)\delta m+y^2\Sigma(x_1^2+z_1^2)\delta m+x^2\Sigma(y_1^2+z_1^2)\delta m \\ -2yz\,\Sigma\, y_1 z_1\,\delta m-2xz\,\Sigma\, x_1 z_1\,\delta m-2xy\,\Sigma\, x_1 y_1\,\delta m \end{array}\right\}=1,$$

(zie DUHAMEL, *Cours de Mecanique*, II., N°. 82) neemt alzoo den vorm

$$Az^2+By^2+Cx^2+Dyz=1$$

aan. De as der $x$ is dus eene van de assen dezer ellipsoïde, en bijgevolg eene der hoofdomwentelingsassen van het ligchaam.

De beide andere hoofdassen, die door den oorsprong van het aangenomen coördinatenstelsel gaan, zijn de assen der ellips, volgens welke de centrale ellipsoïde door het vlak der $yz$ gesneden wordt.

Is men nu in staat de momenten van traagheid des ligchaams te bepalen, ten opzigte van drie verschillende assen, die in het vlak der $yz$ zoodanig zijn aangenomen, dat zij de as der $y$ in den oorsprong onder gegevene hoeken $\alpha_1$, $\alpha_2$ en $\alpha_3$ snijden; en zet men op deze assen, van den oorsprong af te rekenen, lijnen uit, die omgekeerd evenredig met de vierkantswortels uit de gevondene momenten van traagheid zijn; zoodat deze lijnen in lengte door $\frac{1}{\sqrt{M_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{M_2}}$ en $\frac{1}{\sqrt{M_3}}$ worden voorgesteld, wanneer $M_1$, $M_2$ en $M_3$ de genoemde momenten zijn; dan zijn de uiteinden der alzoo uitgezette lijnen, punten der bovengemelde ellips. Het bepalen van den stand der hoofdassen is dan teruggebragt, tot het vinden van den stand der assen in de ellips, welke den oorsprong tot middelpunt heeft, en waarvan drie punten gegeven zijn door hunne coördinaten:

$$\frac{Cos.\,\alpha_1}{\sqrt{M_1}},\ \frac{Sin.\,\alpha_1}{\sqrt{M_1}};\ \frac{Cos.\,\alpha_2}{\sqrt{M_2}},\ \frac{Sin.\,\alpha_2}{\sqrt{M_2}};\ \frac{Cos.\,\alpha_3}{\sqrt{M_3}},\ \frac{Sin.\,\alpha_3}{\sqrt{M_3}}.$$

Onder al de voerstralen, die uit het middelpunt eener ellips naar haren omtrek kunnen worden getrokken, is de groote as een maximum, de kleine een minimum. Het moment van traagheid des ligchaams zal derhalve omgekeerd een minimum en een maximum zijn, ten opzigte van de groote en van de kleine as der doorsnede, van de centrale ellipsoïde, met het vlak der $yz$, dat is, ten opzigte van de hoofdassen. Heeft men dus het moment $M$ des ligchaams, ten opzigte van eene as, die in het vlak der $yz$ ligt en de as der $y$ in den oorsprong onder een veranderlijken hoek $\phi$ snijdt, in eene functie van dien hoek $\phi$ en de gegevens uitgedrukt; zoo is het bepalen van den stand der hoofdomwentelingsassen teruggebragt tot het vinden der waarde van $\phi$, welke die functie tot een maximum en tot een minimum maakt.

---

Wij stellen ons voor, ter bepaling van den stand der hoofdassen van omwenteling, die in een gelijkslachtigen scheeven kegel met cirkelvormig grondvlak door het zwaartepunt kunnen getrokken worden, achtereenvolgens de beide bovenaangewezene wegen te volgen.

---

Zij, ter bepaling van den kegel TABCD, in Fig. 31 voorgesteld, gegeven de straal van het grondvlak $QA = QB = QC = r$, de hoogte $TT' = h$, en de hoek, welken de as QT met het grondvlak maakt, *hoek* $TQT' = \theta$; terwijl verder de digtheid van dit ligchaam $\rho$ zij. Daar echter, wegens de ondersteldе gelijkslachtigheid van den kegel, $\rho$ standvastig is, zal de stand der hoofdassen alleen van $\theta$ en van de betrekking tusschen $h$ en $r$ kunnen afhangen. Stellen wij verder ter bekorting de massa $\frac{1}{3}\pi\rho h r^2 = m$.

Het projecterend vlak TAB van de as QT des kegels op het grondvlak ABCD, verdeelt blijkbaar het ligchaam in twee gelijke en gelijkvormige deelen, die aan weerszijden van dat vlak bij tegenoverstand geplaatst zijn. Dit vlak TAB nemen wij als het vlak der $yz$, en het zwaartepunt O van het ligchaam als oorsprong aan. De lijn OX, door het zwaartepunt O loodregt op het vlak

TAB getrokken, is dan de as der $x$ en, volgens het boven bewezene, eene der hoofdassen. Zij verder OY, evenwijdig aan het grondvlak, de as der $y$, en dus OZ, evenwijdig met TT′, de as der $z$.

Bepalen wij nu vooreerst de traagheidsmomenten $M_1$, $M_2$ en $M_3$ van het ligchaam, ten opzigte van de as der $y$, van de as der $z$ en van de as van den kegel.

Verdeelen wij daartoe den kegel in differentialen, door vlakken op afstanden QI $= u$ en QI′ $= u + \delta u$ evenwijdig aan het grondvlak gebragt, zoo zijn de momenten van den door deze twee snijdende vlakken en het oppervlak des kegels begrensden cilinder EFGHE′F′G′H′, ten opzigte van de lijnen door het middelpunt M van zijn grondvlak EFGH evenwijdig aan de assen der $y$ en der $z$ getrokken, $\frac{1}{4}\pi\rho \mathrm{MF}^4\delta u$ en $\frac{1}{2}\pi\rho \mathrm{MF}^4\delta u$, en ten opzigte van de as des kegels $\frac{1}{4}\pi\rho\,(1 + Sin.^2\,\theta)\,\mathrm{MF}^4\delta u$ (*). De beide eerste momenten vermeerderende met de producten, die er komen, zoo men de massa des cilinders EFGHE′F′G′H′, namelijk $\pi\rho \mathrm{MF}^2\delta u$, vermenigvuldigt met de vierkanten der afstanden van het punt M tot de assen der $y$ en der $z$, vinden wij derhalve:

$$\delta M_1 = \tfrac{1}{4}\pi\rho \mathrm{MF}^4\delta u + \pi\rho \mathrm{MF}^2 \times \mathrm{OL}^2\delta u,$$

$$\delta M_2 = \tfrac{1}{2}\pi\rho \mathrm{MF}^4\delta u + \pi\rho \mathrm{MF}^2 \times \mathrm{ML}^2\delta u,$$

en

$$\delta M_3 = \tfrac{1}{4}\pi\rho\,(1 + Sin.^2\,\theta)\,\mathrm{MF}^4\delta u.$$

Uit de gelijkvormige driehoeken TFM en TBQ volgt

$$\mathrm{BQ} : \mathrm{MF} = \mathrm{TT'} : \mathrm{TT'} - \mathrm{QI}$$

of

$$r : \mathrm{MF} = h : h - u,$$

---

(*) Van een cirkel, die $M$ tot massa en $r$ tot straal heeft, is het moment van traagheid, ten opzigte van eene as door zijn middelpunt getrokken, volgens I. R. SCHMIDT, *Dynamica*, § 344, 345 en 346:

1°. als de as in het vlak van den cirkel ligt, $\frac{1}{4}Mr^2$;

2°. als de as loodregt op het vlak des cirkels is, $\frac{1}{2}Mr^2$;

3°. als de as met dit vlak een′ hoek $\alpha$ maakt, $\frac{1}{4}Mr^2\,(1 + Sin.^2\,\alpha)$; nemende hierin $r = \mathrm{MF}$, $\alpha = \theta$, en vervangende $M$ door de massa des cilinders EFGHE′F′G′H′, welke is $\pi\rho\mathrm{MF}^2\delta u$, zoo verkrijgt men de opgegevene waarden.

W. C.

en dus is $\quad MF = \frac{r}{h}(h - u);$

zoo als bekend is, ligt het zwaartepunt des kegels ter hoogte $OO' = \frac{1}{4}h$ boven het grondvlak, en derhalve is

$$OL = QI - OO' = u - \tfrac{1}{4}h;$$

voorts is $ML = OL \times Tang.\, MOL$, of omdat $MOL$ het complement van $TQT' = \theta$ is,

$$ML = (u - \tfrac{1}{4}h)\, Cot.\,\theta,$$

zoodat men door substitutie dezer waarden verkrijgt:

$$\partial M_1 = \tfrac{1}{4}\pi\rho.\frac{r^4}{h^4}(h-u)^4\,\partial u + \pi\rho.\frac{r^2}{h^2}(h-u)^2\,(u - \tfrac{1}{4}h)^2\,\partial u,$$

$$\partial M_2 = \tfrac{1}{8}\pi\rho.\frac{r^4}{h^4}(h-u)^4\,\partial u + \pi\rho\frac{r^2}{h^2}Cot.^2\theta\,(h-u)^2\,(u - \tfrac{1}{4}h)^2\,\partial u,$$

$$\partial M_3 = \tfrac{1}{4}\pi\rho\,(1 + Sin.^2\theta)\,\frac{r^4}{h^4}(h-u)^4\,\partial u;$$

daar nu deze differentiaaluitdrukkingen van $u = 0$ tot $u = h$ moeten geïntegreerd worden, is:

$$M_1 = \tfrac{1}{4}\pi\rho\frac{r^4}{h^4}\int_0^h (h-u)^4\partial u + \pi\rho\frac{r^2}{h^2}\int_0^h (h-u)^2\,(u - \tfrac{1}{4}h)^2\,\partial u.$$

$$M_2 = \tfrac{1}{8}\pi\rho\,\frac{r^4}{h^4}\int_0^h (h-u)^4\partial u + \pi\rho\frac{r^2}{h^2}Cot.^2\theta\int_0^h (h-u)^2(u - \tfrac{1}{4}h)^2\partial u;$$

$$M_3 = \tfrac{1}{4}\pi\rho\,(1 + Sin.^2\theta)\,\frac{r^4}{h^4}\int_0^h (h-u)^4\,\partial u;$$

maar door werkelijk te integreren, vindt men

$$\int_0^h (h-u)^4\,\partial u = \tfrac{1}{5}h^5,$$

$$\int_0^h (h-u)^2\,(u - \tfrac{1}{4}h)^2\,\partial u = \tfrac{1}{80}h^5,$$

zoodat men, deze waarden substituerende, en tevens $\tfrac{1}{3}\pi\rho h r^2 = m$ invoerende, eindelijk verkrijgt:

$$M_1 = \tfrac{3}{20}\left(1 + \frac{h^2}{4r^2}\right) r^2 m;$$

$$M_2 = \tfrac{3}{80}\left(2 + \frac{h^2}{4r^2}\,Cot.^2\,\theta\right) r^2 m,$$

en $\quad M_3 = \tfrac{3}{20}(1 + Sin.^2\theta)\, r^2 m.$

De in het vlak der $yz$ gelegene assen, ten opzigte waarvan wij deze momenten berekend hebben, maken met de as der $y$ hoeken $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 90°$ en $\alpha_3 = \theta$; derhalve zijn

$$\frac{1}{\sqrt{M_1}} \text{ en } 0, \quad 0 \text{ en } \frac{1}{\sqrt{M_2}}, \quad \frac{Cos.\theta}{\sqrt{M_3}} \text{ en } \frac{Sin.\theta}{\sqrt{M_3}},$$

de coördinaten van drie punten der ellips

$$Az^2 + By^2 + Dyz = 1,$$

volgens welke de centrale ellipsoïde door het vlak der $yz$ gesneden wordt. Ter bepaling der coëfficiënten $A$, $B$ en $D$, heeft men derhalve het stelsel vergelijkingen

$$\frac{B}{M_1} = 1, \ \frac{A}{M_2} = 1 \text{ en } \frac{A\,Sin.^2\theta}{M_3} + \frac{B\,Cos.^2\theta}{M_3} + \frac{D\,Sin.\theta\,Cos.\theta}{M_3} = 1,$$

waaruit volgt:

$$B = M_1, \ A = M_2 \text{ en } D = \frac{M_3 - M_2\,Sin.^2\theta - M_1\,Cos.^2\theta}{Sin.\theta\ Cos.\theta},$$

of, voor $M_1$, $M_2$ en $M_3$ de bovengevondene waarden stellende,

$$B = \tfrac{3}{20}\left(1 + \frac{h^2}{4r^2}\right) r^2 m,$$

$$A = \tfrac{3}{20}\left(2 + \frac{h^2}{4r^2}\,Cot.^2\theta\right) r^2 m,$$

$$D = -\tfrac{3}{20}\left(\frac{h^2}{2r^2}\,Cot.\theta\right) r^2 m.$$

Stellen wij nu verder door $\phi$ en $\psi$ de hoeken voor, die de beide nog te bepalen hoofdassen, namelijk de assen der ellips $Az^2 + By^2 + Dyz = 1$ met de as der $y$ maken, als wanneer dit tevens de hoeken zijn, waaronder die assen het grondvlak van den kegel snijden, dan is (zie STROOTMAN, *Beschouwing der kromme lijnen van den tweeden graad*, § 4.)

$$Cot.2\phi = Cot.2\psi = \frac{B - A}{D};$$

en hierin dan voor $A$, $B$ en $D$ de gevondene waarden overbrengende, komt er

$$Cot.2\phi = Cot.2\psi = \tfrac{1}{2}(Cot.\theta - Tang.\theta) + \frac{2r^2}{h^2}\,Tang.\theta$$

$$= Cot.2\theta + \frac{2r^2}{h^2}\,Tang.\theta.$$

Wij hebben derhalve: *ten eerste* bewezen, dat de lijn, door het zwaartepunt van den kegel loodregt getrokken op het projecterend vlak van de as op het grondvlak, eene der hoofdassen is, en dat dus de beide andere in het genoemde projecterende vlak moeten gelegen zijn; en *ten tweede,* de cotangens van het dubbel van den hoek, onder welken die beide andere assen het grondvlak snijden, uitgedrukt in functie van de gegevens, die den kegel bepalen.

De stand dier assen is dus volkomen bepaald, en alzoo aan het gevraagde voldaan.

---

Alvorens aan te toonen, dat de tweede wijze van beschouwing tot dezelfde uitkomst leidt, willen wij nog het volgende opmerken.

Is $\theta = 90^\circ$ en dus de kegel regt, zoo is $Cot.\ 2\theta = \infty$; de assen der $x$, $y$ en $z$ zijn dus in dit geval de hoofdassen. De bij den aanvang van dit onderzoek betoogde stelling brengt ons tot hetzelfde besluit. Alleen, ingeval de kegel regt is, behoort zijn as tot de hoofdassen; immers alleen voor $\theta = 0$ verdwijnt de term $\frac{2r^2}{h^2}\ Tang.\,\theta$, en wordt dus $Cot.\,2\phi = Cot.\,2\theta$.

De coëfficiënt $C$ van $x^2$, in de vergelijking der centrale ellipsoïde, is blijkbaar niets anders dan het moment van traagheid des kegels, ten opzigte van de as der $x$. Volgt men ter bepaling van dat moment volmaakt denzelfden weg, die boven ter bepaling van de momenten $M_1$, $M_2$ en $M_3$ gevolgd is, zoo vindt men

$$C = \tfrac{3}{20}\left(1 + \frac{h^2}{4r^2\ Sin.^2\,\theta}\right) r^2 m,$$

of, de lengte van de as QT des kegels door $l$ voorstellende,

$$C = \tfrac{3}{20}\left(1 + \frac{l^2}{4r^2}\right) r^2 m.$$

Het moment $M'$ van den kegel, ten opzigte eener as, die op eenen afstand $d$ van het zwaartepunt verwijderd is, en de rigtingen van de assen der $x$, $y$ en $z$ onder hoeken $a$, $b$ en $c$ snijdt, wordt gevonden door $d^2 m$ op te tellen bij het moment $M''$, ten opzigte van eene as, evenwijdig aan de eerste, door het zwaartepunt getrokken. Het punt, waarvan de coördinaten zijn $\frac{Cos.\,a}{\sqrt{M''}}$,

$\frac{Cos. b}{\sqrt{M''}}$ en $\frac{Cos. c}{\sqrt{M''}}$, behoort blijkbaar tot het oppervlak der centrale ellipsoïde; waaruit volgt

$$M'' = A\,Cos.^2 c + B\,Cos.^2 b + C\,Cos.^2 a + D\,Cos. b\,Cos. c$$

en

$$M' = A\,Cos.^2 c + B\,Cos.^2 b + C\,Cos.^2 a + D\,Cos. b\,Cos. c + d^2 m.$$

Het moment $C$, ten opzigte van eene der hoofdassen, is reeds boven bepaald, namelijk, ten opzigte van de as der $x$. De momenten, ten opzigte van de beide andere hoofdassen, zijn niet anders dan de coëfficiënten $A'$ en $B'$ van $x'$ en $y'$, in de vergelijking $A'x'^2 + B'y'^2 + Cx^2 = 1$ der centrale ellipsoïde ten opzigte der hoofdassen als coördinatenassen; ze kunnen naar verkiezing berekend worden: òf door in de bovengevondene uitdrukking $d = 0$, $c = 90°$, $Cot. 2a = Cot. 2b = \frac{B - A}{D}$ en daarna voor $A$, $B$, $C$ en $D$ de gevondene waarden te stellen; òf door die gevondene waarden te substitueren in

$$A' = \tfrac{1}{2}\left\{A + B + \sqrt{[(A - B)^2 + D^2]}\right\}$$

en $$B' = \tfrac{1}{2}\left\{A + B - \sqrt{[(A - B)^2 + D^2]}\right\}.$$

(zie nogmaals de bovenaangehaalde § 4).

---

Volgen wij thans den tweeden weg.

Verdeelen wij daartoe, even als boven, den kegel in differentialen, door vlakken op de afstanden $QI = u$ en $QI' = u + \partial u$ evenwijdig aan het grondvlak; zoo is het moment van den door deze snijdende vlakken en het oppervlak des kegels begrensden cilinder EFGHE'F'G'H', ten opzigte van eene as MV', door het middelpunt M van zijn grondvlak, in het vlak der $yz$, onder eenen hoek $\phi$ met de as der $y$ getrokken, $\frac{1}{4}\pi\rho\,(1 + Sin.^2\phi)\,MF^4\partial u$ (*). Het moment van dienzelfden cilinder, welks massa is $\pi\rho MF^2\partial u$, is dus ten opzigte van eene as OV, evenwijdig met MV' door het zwaartepunt des kegels gebragt,

$$\partial M = \tfrac{1}{4}\pi\rho\,(1 + Sin.^2\phi)\,MF^4\partial u + \pi\rho MF^2 \times MN^2\partial u,$$

waarin MN de loodlijn is uit het punt M op OV vallende. Maar wij vonden reeds $MF = \frac{r}{h}(h - u)$;

(*) Zie de voorgaande noot.

alsmede OL $= u - \frac{1}{2}h$, waardoor de regthoekige driehoeken OML en OMN geven

$$OM = \frac{OL}{Cos. MOL} = \frac{u - \frac{1}{2}h}{Sin.\,\theta} \text{ en } MN = OM\, Sin.(\theta - \phi) = \frac{(u - \frac{1}{2}h) Sin.(\theta - \phi)}{Sin.\,\theta};$$

door substitutie dezer waarden wordt dan

$$\delta M = \tfrac{1}{4}\pi\rho(1 + Sin.^2\,\phi)\frac{r^4}{h^4}(h - u)^4\,\delta u$$
$$+ \pi\rho\frac{Sin.^2(\theta - \phi)}{Sin.^2\,\theta}\cdot\frac{r^2}{h^2}(h - u)^2(u - \tfrac{1}{2}h)^2\,\delta u,$$

dus $$M = \tfrac{1}{4}\pi\rho\,(1 + Sin.^2\,\phi)\frac{r^4}{h^4}\int_0^h (h - u)^4\,\delta u$$
$$+ \pi\rho\frac{Sin.^2(\theta - \phi)}{Sin.^2\,\theta}\cdot\frac{r^2}{h^2}\int_0^h (h - u)^2(u - \tfrac{1}{2}h)^2\,\delta u;$$

of, zoo wij voor de integralen hare reeds gevondene waarden $\frac{1}{5}h^5$ en $\frac{1}{80}h^5$ stellen, en tevens weder $\frac{1}{3}\pi\rho h r^2 = m$ invoeren,

$$M = \tfrac{3}{20}\left(1 + Sin.^2\,\phi + \frac{h^2}{4r^2}\cdot\frac{Sin.^2(\theta - \phi)}{Sin.^2\,\theta}\right) r^2 m.$$

Wij hebben dus nu nog de waarde van $\phi$ te bepalen, die dit moment als functie van $\phi$ tot een maximum en tot een minimum maakt; hiertoe behoeft slechts de functie

$$w = Sin.^2\,\phi + \frac{h^2}{4r^2}\cdot\frac{Sin.^2(\theta - \phi)}{Sin.^2\,\theta}$$

te differentiëren, en daarna $\frac{\delta w}{\delta \phi}$ gelijk nul te stellen; men vindt

dan $$\frac{\delta w}{\delta \phi} = Sin.\,2\phi - \frac{h^2}{4r^2}\cdot\frac{Sin.\,2(\theta - \phi)}{Sin.^2\,\theta} = 0,$$

dus $$Sin.\,2\phi\; Sin.^2\,\theta = \frac{h^2}{4r^2}\,Sin.(2\theta - 2\phi)$$

of $$Sin.\,2\phi\; Sin.^2\,\theta = \frac{h^2}{4r^2}(Sin.\,2\theta\; Cos.\,2\phi - Cos.\,2\theta\; Sin.\,2\phi),$$

en, na deeling door $Sin.\,2\theta\; Sin.\,2\phi$,

$$\frac{Sin.^2\,\theta}{Sin.\,2\theta} = \frac{h^2}{4r^2}(Cot.\,2\phi - Cot.\,2\theta),$$

waaruit volgt $$Cot.\,2\phi = Cot.\,2\theta + \frac{4r^2}{h^2}\,\frac{Sin.^2\,\theta}{Sin.\,2\theta},$$

of na herleiding

$$Cot.\,2\phi = Cot.\,2\theta + \frac{2r^2}{h^2}\,Tang.\,\theta,$$

even als boven. Het toetsen dezer waarden van $\phi$, aan de volgende differentiaalquotiënten, is blijkbaar overbodig.

---

Volgt men den laatstaangewezen weg, zoo komt men zonder veel moeite tot een veel algemeener resultaat, waaruit dat voor ons geval gemakkelijk af te leiden is.

Denken wij ons namelijk eenen gelijkslachtigen kegel, die zoodanig gesteld is, dat èn het ligchaam èn zijn grondvlak respectievelijk in volkomen gelijke en bij tegenoverstand geplaatste deelen worden gesneden; — de kegel door het vlak, dat men door zijn top en zwaartepunt loodregt op het grondvlak kan brengen; — het grondvlak door de lijn, die men daarin, uit deszelfs zwaartepunt, loodregt op het genoemde snijdende vlak kan trekken. Stellen wij dan het moment van traagheid des grondvlaks, ten opzigte van de laatstgenoemde lijn, door $\mu$, en den inhoud des grondvlaks door $I$ voor; zij verder wederom $h$ de hoogte van den kegel; $\theta$ de hoek, tusschen het grondvlak en de lijn, die den top des kegels met zijn zwaartepunt vereenigt; en eindelijk $\phi$ en $\psi$ de hoeken, waaronder het grondvlak gesneden wordt door de beide hoofdassen van omwenteling, die, volgens het boven bewezene, door het zwaartepunt des ligchaams, in het genoemde snijdende vlak kunnen worden getrokken; zoo vindt men

$$Cot.\,2\phi = Cot.\,2\psi = Cot.\,2\theta + \frac{8\mu}{h^2 I}\,Tang.\,\theta.$$

Keeren wij tot de vorige onderstelling terug, dan is $\mu = \frac{1}{4}\pi r^4$, $I = \pi r^2$, en er komt even als boven

$$Cot.\,2\phi = Cot.\,2\theta + \frac{2r^2}{h^2}\,Tang.\,\theta.$$

---

Denkt men zich een ellips, met $r$ en $r'$ tot halve assen, en neemt men in het vlak, door de as $r$ loodregt op het vlak der ellips gebragt, een willekeurig punt als top van eenen gelijkslachtigen scheeven kegel aan, die de genoemde ellips tot grond-

vlak heeft; zoo is $\mu = \frac{1}{4}\pi r^3 r'$, $I = \pi r r'$ en derhalve wederom

$$Cot.\,2\phi = Cot.\,2\theta + \frac{2r^2}{h^2}\,Tang.\,\theta\,,$$

onafhankelijk van $r'$, waaruit wij ten slotte het volgende resultaat afleiden:

Bij al de scheeve elliptische kegels van het stelsel, dat men verkrijgt door $r'$ te laten veranderen, vallen de hoofdomwentelingsassen, die door hun gemeenschappelijk zwaartepunt kunnen worden getrokken, langs elkander; en dus ook langs die van den scheeven kegel met cirkelvormig grondvlak, welke tot het stelsel behoort.

# OPLOSSING

VAN EEN

ALS PRIJSVRAAG VOORGESTELD

# VRAAGSTUK,

VOOR WELKS BEANTWOORDING, TER ALGEMEENE VERGADERING VAN DEN JARE 1849, EENE AANLAGE TER BEHALING VAN EENEN PRIJS IS TOEGEKEND, AAN HET LID DES GENOOTSCHAPS

***G. F. W. BAEHR.***

*Math. et Phil. Nat. Cand.*

## VRAAGSTUK M.

*Een volkomen buigbare en onrekbare draad, in een vast punt bevestigd, is in twee zijner punten met gegeven gewigten bezwaard. Indien nu dat stelsel uit den evenwigtstoestand gebragt en vervolgens aan de werking der zwaartekracht overgelaten wordt, vraagt men, de hieruit ontstaande slingerende beweging der gewigten te bepalen; en bijzonderlijk het geval te onderzoeken, waarin de slingeringen ondersteld worden oneindig klein te zijn.*

## OPLOSSING.

Het is klaar, dat, tijdens den geheelen duur der beweging, de draad steeds gespannen zal blijven; en wel omdat aan de massieve punten geene willekeurige snelheden medegedeeld worden. Immers er wordt slechts verondersteld, dat de toestel, uit den evenwigtstoestand gebragt zijnde, aan de werking der zwaartekracht overgelaten is.

Indien men dus de lengte van den draad, van het ophangpunt tot aan het eerste massieve punt door $l$, en den afstand van dit

eerste massieve punt tot het tweede door $l'$ voorstelt; voorts, ten opzigte van een regthoekig assenstelsel, waarvan het ophangpunt de oorsprong is en de positieve as der $z$ in de rigting der zwaartekracht genomen wordt, de coördinaten van het eerste massieve punt $x$, $y$ en $z$, die van het tweede $x'$, $y'$ en $z'$ noemt, zullen deze coördinaten, gedurende de beweging, steeds blijven voldoen aan de vergelijkingen

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \\ (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = l'^2 \end{array}\right\} \quad . . (1)$$

De versnelling van ieder punt op zeker tijdstip, kan men ontbinden in drie andere, evenwijdig met de assen, deze zijn dan:

voor het 1ste punt $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$;

voor het 2de punt $\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}$;

en de massa's dezer punten, of liever hunne gewigten in ponden, respectievelijk door $m$ en $m'$ voorstellende, zijn de krachten, die op deze punten zouden moeten werken, om, indien zij geheel vrij waren, dezelfde versnellingen voort te brengen,

voor het 1ste punt $\frac{m}{g}.\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{m}{g}.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\frac{m}{g}.\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$;

en voor het 2de punt $\frac{m'}{g}.\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}$, $\frac{m'}{g}.\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}$, $\frac{m'}{g}.\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}$;

waarin $g$ de versnelling der zwaartekracht voorstelt. (*)

Volgens het grondbeginsel van D'ALEMBERT, moet er nu, door middel van het verband der punten, steeds evenwigt zijn tusschen deze krachten in tegengestelde rigting genomen, en de krachten die werkelijk op de punten zijn aangebragt; deze laatste bepalen zich hier tot de gewigten $m$ en $m'$. Er moet dus evenwigt zijn tusschen de volgende krachten:

$$-\frac{m}{g}.\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad -\frac{m}{g}.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad m - \frac{m}{g}.\frac{\partial^2 z}{\partial t^2};$$

en

$$-\frac{m'}{g}.\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}, \quad -\frac{m'}{g}.\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}, \quad m' - \frac{m'}{g}.\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}.$$

Het grondbeginsel der virtuele snelheden geeft, als voorwaarde voor dit evenwigt, de vergelijking

(*) Zie: J. P. DELPRAT, *Dynamica.* § 36.

$$-\frac{m}{g}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\delta x - \frac{m'}{g}\cdot\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}\,\delta x' - \frac{m}{g}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\delta y - \frac{m'}{g}\cdot\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}\,\delta y'$$

$$+\left\{m - \frac{m}{g}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right\}\delta z + \left\{m' - \frac{m'}{g}\cdot\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}\right\}\delta z' = 0$$

of na herleiding

$$-m\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\,\delta x - m'\,\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}\,\delta x' - m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\delta y - m'\,\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}\,\delta y'$$

$$+ m\left\{g - \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right\}\delta z + m'\left\{g - \frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}\right\}\delta z' = 0;\ldots (2)$$

hierin mogen echter de variatiën niet allen willekeurig genomen worden, daar zij moeten voldoen aan de uit (1) voortvloeijende vergelijkingen $x\delta x + y\delta y + z\delta z = 0$,

$$(x'-x)(\delta x'-\delta x)+(y'-y)(\delta y'-\delta y)+(z'-z)(\delta z'-\delta z)=0;$$

blijkende voorts uit de vergelijking (2) reeds dadelijk, dat de beweging van den toestel niet afhankelijk is van de volstrekte waarden der massa's $m$ en $m'$, maar alleen van de verhouding dier massa's.

Telt men deze laatste vergelijkingen, na ze respectievelijk met zekere onbepaalde factoren $\lambda$ en $\mu$ vermenigvuldigd te hebben, bij de vergelijking (2) op, zoo verkrijgt men:

$$\left.\begin{aligned}&\left\{-m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\lambda x-\mu(x'-x)\right\}\delta x+\left\{-m'\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}+\mu(x'-x)\right\}\delta x'\\ +&\left\{-m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\lambda y-\mu(y'-y)\right\}\delta y+\left\{-m'\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}+\mu(y'-y)\right\}\delta y'\\ +&\left\{m\left(g-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)+\lambda z-\mu(z'-z)\right\}\delta z+\left\{m'\left(g-\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}\right)+\mu(z'-z)\right\}\delta z'\end{aligned}\right\}=0;$$

en hierin mogen dan de variatiën geheel willekeurig genomen worden; zoodat de coëfficiënt van iedere variatie in het bijzonder gelijk nul mag gesteld worden. Dit geeft:

$$-m\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \lambda x - \mu(x'-x) = 0,\ldots (a)$$

$$-m\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \lambda y - \mu(y'-y) = 0,\ldots (b)$$

$$mg - m\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \lambda z - \mu(z'-z) = 0,\ldots (c)$$

$$-m'\,\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} + \mu(x'-x) = 0,\ldots\ldots (d)$$

$$-m'\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}+\mu(y'-y)=0, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (e)$$

$$m'g-m'\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}+\mu(z'-z)=0. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (f)$$

Door nu tusschen deze zes vergelijkingen, de onbepaalde factoren $\lambda$ en $\mu$ te elimineren, zal men vier vergelijkingen bekomen, die met de beide vergelijkingen (1) het vereischte stelsel van vergelijkingen uitmaken, om de coördinaten der massieve punten; voor elk tijdstip der beweging, als functiën van den tijd te bepalen.

Tot de genoemde eliminatie kan men vooreerst (a) met (d), (b) met (e), en (c) met (f) door optelling verbinden; hierdoor verkrijgt men:

$$-m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-m'\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}+\lambda x=0, \quad . \; . \; . \quad (g)$$

$$-m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-m'\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}+\lambda y=0, \quad . \; . \; . \quad (h)$$

$$g(m+m')-m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-m'\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}+\lambda z=0; \quad . \; . \; . \quad (i)$$

elimineert men vervolgens $\lambda$, eerst tusschen (g) en (h), daarna tusschen (g) en (i), zoo komt er:

$$m\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)+m'\left(x\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}\right)=0, \quad . \quad (3)$$

$$m\left(x\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-z\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)+m'\left(x\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}-z\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}\right)-g(m+m')x=0; \quad (4)$$

en elimineert men desgelijks $\mu$, eerst tusschen (d) en (e), daarna tusschen (d) en (f), zoo vindt men:

$$\frac{1}{x'-x}\cdot\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}-\frac{1}{y'-y}\cdot\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}=0, \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

en $$\frac{1}{x'-x}\cdot\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}-\frac{1}{z'-z}\cdot\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}+\frac{g}{z'-z}=0. \quad . \quad (6)$$

De vergelijkingen (1), (3), (4), (5) en (6) bevatten wel al de betrekkingen van afhankelijkheid, die tot de volkomene oplossing van het vraagstuk moeten voeren, maar de integratie der vier laatste is niet regtstreeks uitvoerbaar, zelfs al vervangt men de regthoekige coördinaten door polaire. Stelt men daartoe door $\theta$ voor den hoek, begrepen tusschen de positieve as der $z$ en de lijn $l$, aan wier uiteinde zich het eerste massieve punt bevindt; en

door $\psi$ den hoek begrepen tusschen het vlak der $xz$ en een vlak dat door de as der $z$ en de lijn $l$ gaat, dan zou men hebben:

$$x = l \, Sin.\theta \; Cos.\psi,$$
$$y = l \, Sin.\theta \; Sin.\psi,$$
$$z = l \, Cos.\theta;$$

verbeeldt men zich verder een nieuw regthoekig assenstelsel, evenwijdig met het vorige, en waarvan het eerste massieve punt de oorsprong is, zoo zou men, de rigting van de lijn $l'$ op gelijke wijze door hoeken $\theta'$ en $\psi'$ bepalende, voor de coördinaten van het tweede massieve punt, ten aanzien van die nieuwe assen, desgelijks hebben $l' \, Sin.\theta' \; Cos.\psi'$, $l' \, Sin.\theta' \; Sin.\psi'$ en $l' \, Cos.\theta'$, waaruit dan volgt:

$$x' = l \, Sin.\theta \; Cos.\psi + l' \, Sin.\theta' \; Cos.\psi',$$
$$y' = l \, Sin.\theta \; Sin.\psi + l' \, Sin.\theta' \; Sin.\psi',$$
$$z' = l \, Cos.\theta + l' \, Cos.\theta';$$

substitueerde men nu deze waarden, en die welke daaruit voor $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}$, enz. voortvloeijen, in de gevondene vergelijkingen, zoo zouden deze wel eenen vorm verkrijgen, die eene benaderde oplossing toeliet voor het geval dat de toestel slechts *weinig* uit den evenwigtstoestand werd gebragt, en dat de hoeken $\theta$, $\theta'$, $\psi$ $\psi'$ tijdens den geheelen duur der beweging *zeer klein* bleven, maar dit zal ten aanzien der hoeken $\psi$ en $\psi'$ geenszins plaats hebben. Want zoo de beide massieve punten, nadat zij uit de verticaal gebragt zijn, niet met het ophangpunt in een zelfde verticaal blijven; zal in het algemeen de beweging van het eerste massieve punt, door het verband van dit punt met het tweede, eenigzins met de beweging van eenen kegelvormigen slinger overeenkomen; het verticale vlak door dit eerste massieve punt en het ophangpunt gaande, zal dus om de verticale as der $z$ wentelen, waardoor de hoek $\psi$, en bijgevolg ook $\psi'$, van 0° tot 360° kan aangroeijen terwijl $\theta$ en $\theta'$ steeds zeer klein blijven.

Wij zullen daarom onderstellen, dat de slingeringen in een verticaal vlak plaats hebben. Voor dit vlak het reeds beschouwde vlak der $xz$ nemende, worden $y$ en $y'$ beide nul; hierdoor gaan de vergelijkingen (1) over in

$$\left.\begin{aligned} x^2 + z^2 &= l^2, \\ (x' - x)^2 + (z' - z)^2 &= l'^2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (1')$$

terwijl de vergelijkingen (3) en (5) vervallen, en de vergelijkingen (4) en (6) onveranderd blijven bestaan. Ter oplossing van het vraagstuk, hebben wij derhalve thans alleen de vergelijkingen (1'), (4) en (6).

Zij $\theta$ de hoek tusschen de lijn $l$ en de as der $z$, $\theta'$ de hoek tusschen de lijn $l'$ en eene evenwijdige aan de as der $z$, dan is:

$$x = l \; Sin.\theta, \quad x' = l \; Sin.\theta + l' \; Sin.\theta',$$
$$z = l \; Cos.\theta, \quad z' = l \; Cos.\theta + l' \; Cos.\theta';$$

door deze waarden van $x$, $z$, $x'$ en $z'$ wordt al dadelijk aan de vergelijkingen (1') voldaan, terwijl men verder daaruit door differentiatie zal vinden:

$$\partial^2 x = l \; Cos.\theta \partial^2\theta - l \; Sin.\theta \partial\theta^2,$$
$$\partial^2 z = - l \; Sin.\theta \partial^2\theta - l \; Cos.\theta \partial\theta^2,$$
$$\partial^2 x' = \partial^2 x + l' \; Cos.\theta' \partial^2\theta' - l' \; Sin.\theta' \partial\theta'^2,$$
$$\partial^2 z' = \partial^2 z - l' \; Sin.\theta' \partial^2\theta' - l' \; Cos.\theta' \partial\theta'^2.$$

Deze waarden in de vergelijkingen (4) en (6) substitueerende, komt er na herleiding

$$(m+m') l \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} + m'l' \frac{\partial^2\theta'}{\partial t^2} Cos.(\theta'-\theta) - m'l' \left(\frac{\partial\theta'}{\partial t}\right)^2 Sin.(\theta'-\theta)$$
$$+ g(m+m') Sin.\theta = 0, \ldots\ldots \quad (7)$$
$$l' \frac{\partial^2\theta'}{\partial t^2} + l \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} Cos.(\theta'-\theta) + l \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 Sin.(\theta'-\theta)$$
$$+ g \; Sin.\theta' = 0; \ldots\ldots \quad (8)$$

en uit deze vergelijkingen ziet men, dat zelfs in dit meer eenvoudige geval de algemeene oplossing aan vele zwarigheden onderhevig is.

Wij gaan uit dien hoofde, zoo als dit bijzonderlijk in de opgave verlangd is, het geval beschouwen, waarin de hoeken $\theta$ en $\theta'$ niet anders dan zeer klein zijn. Alsdan mogen wij, in de gevondene vergelijkingen, de tweede en hoogere magten van $\theta$ en $\theta'$ verwaarloozen; dat is, wij mogen stellen

$$Cos.(\theta'-\theta) = 1, \quad Sin.(\theta'-\theta) = \theta'-\theta, \quad Sin.\theta = \theta, \quad Sin.\theta' = \theta';$$

evenzoo mogen $\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2$ en $\left(\frac{\partial\theta'}{\partial t}\right)^2$, hetgeen de vierkanten zijn der hoeksnelheden van het eerste punt om het ophangpunt, en van het tweede om het eerste, verwaarloosd worden; want deze hoeksnelheden zullen steeds zeer klein blijven. Door deze ver-

waarloozingen gaan dan (7) en (8) over in

$$(m + m')\, l \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m'l' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2} + g(m + m')\, \theta = 0$$

en
$$l \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + l' \frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2} + g\theta' = 0,$$

welke vergelijkingen nu volkomen juist zijn, wanneer men alleen de oneindig kleine schommelingen van den toestel wil beschouwen.

De beide laatste vergelijkingen ten opzigte van $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ en $\frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2}$ oplossende, vinden wij

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\frac{g}{l}.\frac{m + m'}{m}\,\theta + \frac{g}{l}.\frac{m'}{m}\,\theta',$$

$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2} = \frac{g}{l'}.\frac{m + m'}{m}\,\theta - \frac{g}{l'}.\frac{m + m'}{m}\,\theta',$$

of ter bekorting stellende

$$-\frac{g}{l}.\frac{m+m'}{m} = a,\ \frac{g}{l}.\frac{m'}{m} = b,\ \frac{g}{l'}.\frac{m+m'}{m} = a',\ -\frac{g}{l'}.\frac{m+m'}{m} = b',$$

hebben wij eenvoudiglijk

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = a\theta + b\theta' \dots\dots\dots (9)$$

en
$$\frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2} = a'\theta + b'\theta' \dots\dots\dots (10)$$

Ten einde deze vergelijkingen te integreren, zal men vooreerst kunnen stellen

$$\theta = Sin.(pt + c),\quad \theta' = r\ Sin.(pt + c),$$

en vervolgens de hier voorkomende standvastigen $p$, $c$ en $r$ zoodanig kunnen bepalen, dat aan die vergelijkingen door de gestelde waarden van $\theta$ en $\theta'$ voldaan worde. Uit dezelve volgt door differentiatie

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -p^2\ Sin.(pt + c),\quad \frac{\partial^2 \theta'}{\partial t^2} = -rp^2\ Sin.(pt + c),$$

en al deze waarden in (11) en (12) overbrengende, komt er

$$-p^2 = a + br \quad \text{en} \quad -rp^2 = a' + b'r,$$

door welke vergelijkingen nu $p$ en $r$ bepaald zijn. Uit de eerste heeft men
$$r = -\frac{a + p^2}{b}.$$

en deze waarde van $r$ in de tweede overbrengende, verkrijgt men

de vergelijking

$$p^4 + (a + b')\, p^2 = a'b - ab',$$

of voor $a$, $b$, $a'$ en $b'$ hare waarden stellende

$$p^4 - \frac{m + m'}{m} \cdot \frac{g\,(l + l')}{ll'}\, p^2 = -\cdot \frac{m + m'}{m'} \cdot \frac{g^2}{ll'},$$

waaruit gevonden wordt

$$p^2 = \frac{g\,(m + m')\,(l + l')}{2ll'm} \pm \frac{g\sqrt{(m + m')\left\{m(l-l')^2 + m'(l+l')^2\right\}}}{2ll'm}.$$

Hieruit blijkt dat $p$ vier waarden zou kunnen hebben; deze zijn echter twee aan twee slechts tegengesteld van teeken, doch overigens aan elkander gelijk, en daar men, in de voor $\theta$ en $\theta'$ gestelde vormen, $t$ ook negatief kan nemen, zonder dat daardoor de vergelijkingen ter bepaling van $p$ en $r$ eenige verandering ondergaan, zoo geven elke twee tegengestelde waarden slechts eene zelfde oplossing. Nemen wij dus alleen de beide positieve waarden van $p$ in aanmerking, en stellen wij de grootste van beide door $p_1$, de kleinste door $p_2$ voor; noemen wij verder $r_1$ en $r_2$ de waarden van $r$, die met deze beide waarden van $p$ overeenkomen, en dus gevonden worden door de formulen

$$r_1 = -\frac{a + p_1^2}{b} = \frac{m + m'}{m'} - \frac{ml}{m'g}\, p_1^2,$$

$$r_2 = -\frac{a + p_2^2}{b} = \frac{m + m'}{m'} - \frac{ml}{m'g}\, p_2^2;$$

en stellen wij ter bekorting de wortelgrootheid, die in de voor $p^2$ gevondene uitdrukking voorkomt, door eene enkele letter $w$ voor; dan hebben wij:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{\frac{(m + m')\,(l + l') + w}{2ll'm}\, g}, \\ p_2 &= \sqrt{\frac{(m + m')\,(l + l') - w}{2ll'm}\, g}, \\ r_1 &= \frac{-\,(m + m')\,(l - l') - w}{2l'm'}, \\ \text{en}\quad r_2 &= \frac{-\,(m + m')\,(l - l') + w}{2l'm'}, \\ \text{waarin}\quad w &= \sqrt{(m + m')\left\{m\,(l - l')^2 + m'\,(l + l')^2\right\}} \end{aligned}\right\} \quad .\ .\ (11)$$

is. En nu zal aan de vergelijkingen (9) en (10) voldaan worden, niet alleen door

$$\theta = Sin.(p_1 t + c_1) \quad \text{en} \quad \theta' = r_1 \; Sin.(p_1 t + c_1),$$

maar ook door

$$\theta = Sin.(p_2 t + c_2) \quad \text{en} \quad \theta' = r_2 \; Sin.(p_2 t + c_2).$$

Wanneer men derhalve elk dezer bijzondere integralen nog met eene willekeurige standvastige vermenigvuldigt, en de som der producten neemt, vindt men, voor de algemeene integralen der vergelijkingen (9) en (10):

$$\left.\begin{aligned} \theta &= A_1 \; Sin.\,(p_1 t + c_1) + A_2 \; Sin.(p_2 t + c_2) \\ \text{en } \theta' &= A_1 r_1 \; Sin.(p_1 t + c_1) + A_2 r_2 \; Sin.(p_2 t + c_2), \end{aligned}\right\} (12)$$

welke nu, zoo als het behoort, vier willekeurige onherleidbare standvastigen bevatten; namelijk $A_1$, $A_2$, $c_1$ en $c_2$.

Om de waarden van deze standvastigen hier te bepalen, stelle men dat $\alpha$ en $\alpha'$ de aanvankelijke waarden van $\theta$ en $\theta'$ zijn; dan moet, voor $t = 0$, $\theta = \alpha$ en $\theta' = \alpha'$ worden, zoodat uit (12) volgt

$$\alpha = A_1 \; Sin. \; c_1 + A_2 \; Sin. \; c_2,$$

en

$$\alpha' = A_1 r_1 \; Sin. c_1 + A_2 r_2 \; Sin. c_2;$$

daar aan de punten geene aanvankelijke snelheid wordt medegedeeld, maar zij alleen aan de werking der zwaartekracht zijn overgelaten, moet, voor $t = 0$, ook $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$ en $\frac{\partial \theta'}{\partial t} = 0$ worden; de waarden, die men uit (12) voor $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ en $\frac{\partial \theta'}{\partial t}$ kan afleiden, geven alzoo

$$0 = A_1 p_1 \; Cos. \; c_1 + A_2 p_2 \; Cos. \; c_2,$$

en

$$0 = A_1 p_1 r_1 \; Cos. c_1 + A_2 p_2 r_2 \; Cos. c_2;$$

aan dit laatste paar vergelijkingen zal slechts voldaan kunnen worden, door te nemen: òf $A_1 = 0$ en $A_2 = 0$, òf $Cos. c_1 = 0$ en $Cos. c_2 = 0$; maar het voorgaande paar vergelijkingen laat niet toe, dat $A_1$ en $A_2$ gelijktijdig nul zouden kunnen zijn; dus moet men nemen $Cos. c_1 = 0$ en $Cos. c_2 = 0$, dat is:

$$c_1 = \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{en} \quad c_2 = \tfrac{1}{2}\pi;$$

hierdoor heeft men, uit het eerste paar vergelijkingen $\alpha = A_1 + A_2$ en $\alpha' = A_1 r_1 + A_2 r_2$ waaruit onmiddellijk gevonden wordt:

$$A_1 = \frac{r_2 \alpha - \alpha'}{r_2 - r_1} \quad \text{en} \quad A_2 = -\frac{r_1 \alpha - \alpha'}{r_2 - r_1};$$

deze waarden der standvastigen in (12) overbrengende, verkrijgt men eindelijk

$$\theta = \frac{r_2 \alpha - \alpha'}{r_2 - r_1} Cos. p_1 t - \frac{r_1 \alpha - \alpha'}{r_2 - r_1} Cos. p_2 t \quad . \ (13)$$

en $$\theta' = \frac{r_1(r_2\alpha - \alpha')}{r_2 - r_1} Cos. p_1 t - \frac{r_2(r_1\alpha - \alpha')}{r_2 - r_1} Cos. p_2 t \quad . \ (14)$$

De vergelijkingen (13) en (14) bevatten nu al de bijzonderheden der beweging, en door het uitbrengen van die vergelijkingen, kan alzoo de vraag geacht worden beantwoord te zijn. Immers leeren zij, voor elk willekeurig tijdsverloop $t$ na den aanvang der beweging, de hoeken $\theta$ en $\theta'$ kennen, die de beide deelen van den draad met de verticaal maken, en die dus onmiddellijk den stand van den toestel aanwijzen. (*)

---

(*) Wanneer men de tellers en noemers der breuken, in de formulen (11) voorkomende, vermenigvuldigt met de verschillen of sommen der beide termen, wier sommen of verschillen de tellers dier breuken uitmaken, herleidt men die formulen gemakkelijk tot

$$p_1 = \sqrt{\frac{2(m+m')}{(m+m')(l+l') - w} g}, \quad p_2 = \sqrt{\frac{2(m+m')}{(m+m')(l+l') + w} g},$$

$$r_1 = \frac{2l(m+m')}{(m+m')(l-l') - w}, \quad r_2 = \frac{2l(m+m')}{(m+m')(l-l') + w};$$

mogten dan voor sommige bijzondere waarden van $l$, $l'$, $m$ en $m'$, de breuken die in (11) voorkomen den vorm $\frac{0}{0}$ aannemen, dan zal dit met de alzoo herleide breuken het geval niet meer zijn.

Alsnu vindt men gemakkelijk:

voor $l' = 0$; $w = (m + m')\, l$, $p_1 = \infty$, $p_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$,

$$r_1 = \infty, \quad r_2 = 1, \quad \text{en} \quad \theta = \alpha \, Cos. t \sqrt{\frac{g}{l}};$$

voor $l = 0$; $w = (m + m')\, l'$, $p_1 = \infty$; $p_2 = \sqrt{\frac{g}{l'}}$,

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{m + m'}{m'}, \quad \text{en} \quad \theta' = \alpha' \, Cos. t \sqrt{\frac{g}{l'}};$$

voor $m' = 0$; $w = m(l - l')$, $p_1 = \sqrt{\frac{g}{l'}}$, $p_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$,

$$r_1 = \infty, \quad r_2 = \frac{l}{l - l'} \quad \text{en} \quad \theta = \alpha \, Cos. t \sqrt{\frac{g}{l}};$$

Stelt men zich enkelvoudige slingers voor, waarvan de hoeken met de verticaal, door $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta'_1$, $\theta'_2$ voorgesteld, voor elk tijdstip bepaald zijn door de formulen

$$\theta_1 = \frac{r_2 \alpha - \alpha'}{r_2 - r_1} Cos. p_1 t, \quad \theta_2 = - \frac{r_1 \alpha - \alpha'}{r_2 - r_1} Cos. p_2 t,$$

$$\theta_1' = \frac{r_1(r_2 \alpha - \alpha')}{r_2 - r_1} Cos. p_1 t, \quad \theta_2' = - \frac{r_2(r_1 \alpha - \alpha')}{r_2 - r_1} Cos. p_2 t,$$

en waarvan de perioden gevonden worden door $p_1 t = 2\pi$ en $p_2 t = 2\pi$ te stellen, dan zal steeds

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 \quad \text{en} \quad \theta' = \theta_1' + \theta_2'$$

zijn. Men kan dus de beweging van elk onzer beide massieve punten beschouwen als uit twee enkelvoudige slingeringen te zijn zamengesteld.

Verder is de algemeene beschouwing der vergelijkingen (13) en (14) aan zeer vele zwarigheden onderhevig; men kan er evenwel gemakkelijk uit afleiden, dat in het algemeen de beweging van den toestel geenszins bestaat uit even groote heen- en weergaande schommelingen van gelijken duur.

Voor $t = 0$ namelijk, waarmede overeenstemt $Cos. p_1 t = Cos. p_2 t = 1$, geven de vergelijkingen (13) en (14) wel naar behooren $\theta = \alpha$ en $\theta' = \alpha'$, maar na dit tijdstip zullen $\theta$ en $\theta'$ niet meer gelijktijdig die aanvankelijke waarden terug kunnen verkrijgen; want uit gezegde vergelijkingen kan men gemakkelijk afleiden, dat niet wederom gelijktijdig $\theta = \alpha$ en $\theta' = \alpha'$ kan wezen, tenzij ook wederom, voor zekere waarde van $t$, $Cos. p_1 t = Cos. p_2 t = 1$ mogt zijn, en men zou dus moeten hebben

$$p_1 t = 2k\pi \quad \text{en} \quad p_2 t = 2k'\pi,$$

waarin $k$ en $k'$ zekere geheele getallen verbeelden; hieruit zou volgen dat $$p_1 : p_2 = k : k'$$

---

voor $m = 0$; $w = m'(l + l')$, $p_1 = \infty$, $p_2 = \sqrt{\frac{g}{l + l'}}$, $r_1 = - \frac{l}{l'}$, $r_2 = 1$, en zoo men dan nog bovendien $\alpha = \alpha'$ stelt, $\theta = \theta' = \alpha \, Cos. t \sqrt{\frac{g}{l + l'}}$;

al hetwelk met de bekende theorie van den enkelvoudigen slinger overeenstemt.

W. C.

moest zijn, of dat $p_1$ en $p_2$ onderling meetbaar moesten wezen, maar in het algemeen zijn $p_1$ en $p_2$, blijkens de daarvoor gevondene waarden onderling onmeetbaar, en derhalve kan dan de beweging in het algemeen niet periodiek zijn.

De verhouding van $p_1$ tot $p_2$ kan echter altijd bij benadering door groote getallen uitgedrukt worden, getallen die grooter zijn, naargelang men de verhouding naauwkeuriger begeert uit te drukken; men kan dus ook altijd eene reeks van tijden aanwijzen, na verloop van welke de toestel meer en meer tot zijnen oorspronkelijken toestand nadert, zonder dien echter ooit volkomen te kunnen bereiken. Men behoeft hiertoe slechts de verhouding $\frac{p_1}{p_2}$, in eene kettingbreuk te ontwikkelen, en de opvolgende naderende breuken dier kettingbreuk te berekenen; is dan $\frac{k}{k'}$ eene dezer naderende breuken, zoodat nagenoeg $\frac{p_1}{p_2} = \frac{k}{k'}$ is, dan zal, als $p_1 t = 2k\pi$ geworden is, ook nagenoeg $p_2 t = 2k'\pi$ geworden zijn, en dus ook wederom nagenoeg $Cos.\ p_1 t = Cos.\ p_2 t = 1$, alsmede $\theta = \alpha$ en $\theta' = \alpha'$.

Mogten echter $p_1$ en $p_2$ onderling meetbaar zijn, hetgeen voor sommige bijzondere waarden van $l$, $l'$, $m$ en $m'$ zou kunnen gebeuren, zoodat men werkelijk had

$$p_1 : p_2 = k : k',$$

door $k$ en $k'$ geheele getallen aangeduid wordende, zoo wordt de tijd $T$, na welken de toestel volkomen in zijnen oorspronkelijken toestand terugkeert, bepaald door de formule

$$T = \frac{2k\pi}{p_1} = \frac{2k'\pi}{p_2},$$

en na verloop van de tijden $2T$, $3T$, $4T$ enz. $nT$ zal dan de toestel telkens andermaal in zijnen oorspronkelijken toestand gekomen zijn.

In twee bijzondere gevallen geven de formulen (13) en (14) merkwaardige uitkomsten; namelijk als de aanvankelijke afwijkingshoeken $\alpha$ en $\alpha'$ zoodanig gegeven zijn, dat men heeft $\frac{\alpha'}{\alpha} = r_2$ of $\frac{\alpha'}{\alpha} = r_1$.

In het *eerste* geval, namelijk als $\alpha' = r_2\alpha$ is, vallen de aanvankelijke afwijkingshoeken aan dezelfde zijde van de verticaal, omdat altijd $r_2$ positief is. Voorts heeft men:

$$r_2\alpha - \alpha' = 0,$$

$$\frac{r_1\alpha - \alpha'}{r_2 - r_1} = \frac{r_1\alpha - r_2\alpha}{r_2 - r_1} = -\alpha,$$

$$\frac{r_2(r_1\alpha - \alpha')}{r_2 - r_1} = r_2 \times - \alpha = - r_2\alpha = - \alpha',$$

zoodat hier de formulen (13) en (14) geven

$$\theta = \alpha \, Cos. \, p_2t \quad \text{en} \quad \theta' = \alpha' \cdot Cos. \, p_2t.$$

Hieruit blijkt, dat in dit bijzondere geval de toestel gelijke en isochronische slingeringen aan weerszijden van de verticaal zal volbrengen, zoodat hij, bij het einde der eerste schommeling, aan de andere zijde van de verticaal eene figuur zal vormen, die bij tegenoverstand gelijk en gelijkvormig is, met de figuur bij het begin. Men vindt namelijk, voor $t = \frac{\pi}{p_2}$ of $p_2t = \pi$, $\theta = -\alpha$ en $\theta' = \alpha'$, terwijl alsdan de hoeksnelheden $\frac{\partial\theta}{\partial t} = -p_2\alpha \, Sin. \, p_2t$ en $\frac{\partial\theta'}{\partial t} = - p_2\alpha' \, Sin. \, p_2t$ beide gelijk nul worden en oogenblikkelijk daarop van teeken veranderen, zoodat de massieve punten wederom naar de andere zijde beginnen te slingeren.

Voor $p_2t = \frac{1}{2}\pi$ of $t = \frac{\pi}{2p_2}$, is $\theta = \theta' = 0$, weshalve op dat tijdstip de geheele draad volgens de verticaal gerigt is.

Voor $t = \frac{\pi}{2p_2} \pm t'$, heeft men $Cos. \, p_2t = Cos. \, (\frac{1}{2}\pi \pm p_2t') = \mp Sin. \, p_2t'$, bijgevolg $\theta = \mp \alpha \, Sin. \, p_2t'$ en $\theta' = \mp \alpha' \, Sin. \, p_2t'$; dat is, evenveel tijd vóór als ná het tijdstip, waarop de geheele draad zich in de verticaal bevindt, zijn de afwijkingshoeken even groot, doch aan tegengestelde zijden van de verticaal gelegen.

Buitendien heeft men, tijdens den geheelen duur der beweging,

$$\theta : \theta' = \alpha : \alpha',$$

alsmede

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} : \frac{\partial\theta'}{\partial t} = \alpha : \alpha' = \theta : \theta';$$

zoodat de afwijkingshoeken evenredig aan hunne oorspronkelijke

waarden blijven, terwijl ook steeds de hoeksnelheden evenredig met de afwijkingshoeken zijn.

De tijd eener geheele schommeling wordt gevonden door $Cos.\ p_2 t = -1$ en dus $p_2 t = \pi$ te stellen; ter bepaling van dien tijd $T$, heeft men dus de formule

$$T = \frac{\pi}{p_2};$$

en stelt men nu door $L$ de lengte van den enkelvoudigen slinger voor, die zijne slingeringen in denzelfden tijd als onze toestel volbrengt, dan is $\frac{\pi}{p_2} = \pi\sqrt{\frac{L}{g}}$,

waaruit volgt

$$L = \frac{g}{p_2^2} = \frac{2ll'm}{(m+m')(l+l')-w},$$

hetgeen gemakkelijk herleid wordt tot

$$L = \tfrac{1}{2}(l+l') + \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{m(l-l')^2 + m'(l+l')^2}{m+m'}};$$

en daar deze wortelgrootheid blijkbaar grooter dan het verschil, maar kleiner dan de som van $l$ en $l'$ is, zal men ook hebben:

als $l > l'$ is, $L > \tfrac{1}{2}(l+l') + \tfrac{1}{2}(l-l') = l > l'$,

als $l' > l$ is, $L > \tfrac{1}{2}(l+l') + \tfrac{1}{2}(l'-l) = l' > l$,

gelijk mede, $L < \tfrac{1}{2}(l+l') + \tfrac{1}{2}(l+l') = l+l'$,

zoodat de lengte van genoemden enkelvoudigen slinger kleiner dan de geheele draad, maar grooter dan het grootste van hare beide deelen is.

In het *tweede* der bovenbedoelde bijzondere gevallen, namelijk als $\alpha' = r_1\alpha$ is, vallen de aanvankelijke afwijkingshoeken aan weerszijden van de verticaal, omdat altijd $r_1$ negatief is. Voorts heeft men dan: $r_1\alpha - \alpha' = 0$,

$$\frac{r_2\alpha - \alpha'}{r_2 - r_1} = \frac{r_2\alpha - r_1\alpha}{r_2 - r_1} = \alpha,$$

$$\frac{r_1(r_2\alpha - \alpha')}{r_2 - r_1} = r_1\alpha = \alpha',$$

zoodat de formulen (13) en (14) in dit geval geven

$$\theta = \alpha\ Cos.p_1 t \quad \text{en} \quad \theta' = \alpha'\ Cos.p_1 t,$$

waaruit soortgelijke opmerkingen als in het voorgaande geval voortvloeijen. De hoeken $\theta$ en $\theta'$ zullen hier steeds aan tegenovergestelde zijden der verticaal vallen; zij zullen gelijktijdig nul

worden; op het oogenblik dat $\theta$ negatief wordt, verkrijgt $\theta'$ eene positieve waarde, en omgekeerd.

Voor den tijd $T'$ eener enkele schommeling, na verloop van welken de figuur van den toestel bij tegenoverstand dezelfde gedaante heeft als bij het begin, heeft men hier

$$T' = \frac{\pi}{p_1}$$

en voor de lengte $L'$ van den enkelvoudigen slinger, die zijne schommelingen in denzelfden tijd als onze toestel volbrengt,

$$L' = \frac{g}{p_1^2} = \frac{2ll'm}{(m+m')(l+l')+w},$$

dat is na herleiding

$$L' = \tfrac{1}{2}(l+l') - \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{m(l-l')^2 + m'(l+l')^2}{m+m'}};$$

hieruit volgt:

als $l > l'$ is, $L' < \frac{1}{2}(l+l') - \frac{1}{2}(l-l') = l' < l$,
als $l' > l$ is, $L' < \frac{1}{2}(l+l') - \frac{1}{2}(l'-l) = l < l'$,
gelijk mede $L' > \frac{1}{2}(l+l') - \frac{1}{2}(l+l') = 0$,

zoodat deze enkelvoudige slinger korter is, dan het kleinste der beide deelen van den draad.

In het algemeen zal men de bijzondere getallenwaarden van $m$, $m'$, $l$ en $l'$ in de formulen (13) en (14) moeten substitueren, om alsdan, met behulp van die getallenvergelijkingen, de verlangde bijzonderheden der beweging op te sporen.

Wil men b. v. de tijden vinden, na verloop van welke de beide deelen van den draad hunne grootste afwijkingen van de vertikaal verkrijgen, zoo zal men uit (13) en (14) de waarden van $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ en $\frac{\partial\theta'}{\partial t}$ moeten afleiden, en die gelijk nul moeten stellen. De vergelijkingen, die men daardoor verkrijgt, zal men dan elk afzonderlijk ten opzigte van de daarin voorkomende onbekende $t$ moeten oplossen, of liever men zal uit die vergelijkingen door benadering de waarden van $t$ moeten berekenen, die in het algemeen in beide vergelijkingen niet dezelfde zullen wezen. Deze benaderde waarden van $t$, in de overeenkomstige vergelijkingen (13) en (14) gesubstitueerd, geven dan voor $\theta$ en $\theta'$ de grootstmogelijke afwijkingshoeken.

Wil men het tijdstip bepalen, waarop het eerste massieve punt

verticaal beneden het ophangpunt komt, zoo stelle men in (13), $\theta = 0$; even als men in (14) $\theta' = 0$ zal moeten stellen, om het tijdstip te bepalen waarop het tweede massieve punt zich verticaal beneden het eerste bevindt. Uit elk der hierdoor verkregene vergelijkingen zal dan wederom $t$ moeten opgelost of benaderd worden.

De genoemde tijdsbepalingen voeren in het algemeen tot de oplossing van transcendentale vergelijkingen, die een der vormen

$$Sin. \phi \pm A\ Sin. B\phi = 0$$

of

$$Cos. \phi \pm A\ Cos. B\phi = 0$$

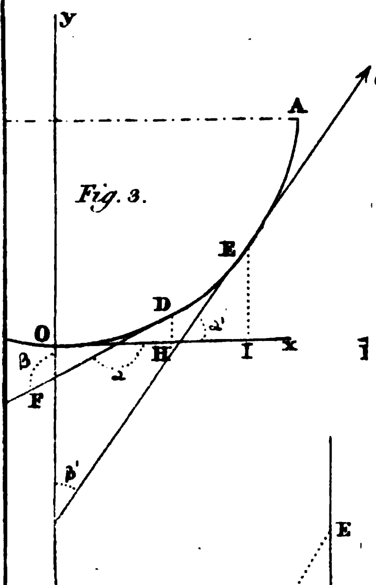
hebben, waarin A en B meestal beide irrationaal zijn. Beschouwt men dan den loop der kromme lijnen, wier vergelijkingen zijn

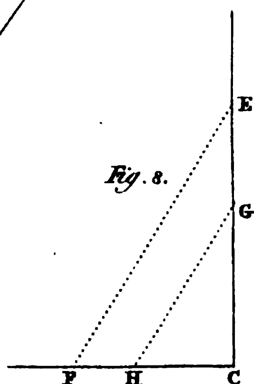
$$y = Sin. x \pm A\ Sin. Bx$$

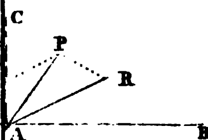
en

$$y = Cos. x \pm A\ Cos. Bx\,,$$

zoo zullen hare snijpunten met de as der $x$ waarden van $\phi$ doen kennen, die aan de genoemde transcendentale vergelijkingen voldoen. Maar de onmeetbaarheid van B zal oorzaak zijn, dat de loop der kromme lijn boven en beneden de as der $x$ tot in het oneindige afwisselt, en dat er dus een oneindig aantal waarden van $\phi$ zijn, die elk op zich zelve door eene bijzondere benadering moeten berekend worden. Ook zullen de ordinaten $y$ der kromme lijn, tusschen twee opvolgende snijpunten met de as der $x$, twee of meermalen maxima of minima kunnen zijn. Dit alles maakt die berekeningen lastig en omslagtig, zoodat wij verder daarvan, zonder in eene te groote uitbreiding te vervallen, geen bijzonder voorbeeld kunnen geven.



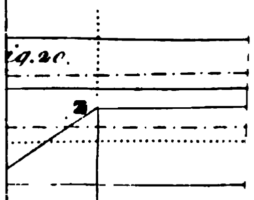



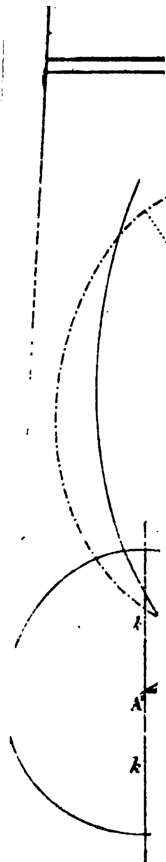

Q

L
Fi
I
A
F
P

E
E'
.19.
I'
E
F'
G
G'
K
I
H



ig.20.


k
A
k

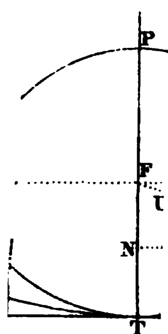

P
F
N
T

*Fig. 31.*

T

V'

H'

H

F'

F

B

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06818 3006